



УДК 539.182+518.5+517.986.69

© 2009

Член-кореспондент НАН України **В. А. Даниленко,**
С. І. Скурагівський

Автохвильові розв'язки нелокальної моделі геофізичних середовищ з урахуванням гістерезисного характеру їх деформування

Узагальнено нелінійні нелокальні математичні моделі геосередовищ шляхом врахування гістерезисного характеру деформування геосередовищ. За допомогою методів якісного та числового аналізу проаналізовано залежність біфуркацій підмножини автохвильових розв'язків нелінійної моделі від параметрів гістерезисної петлі.

Експериментальні дослідження процесів деформування геофізичних середовищ у широкому діапазоні швидкостей навантаження свідчать про те, що ці процеси мають нелінійний гістерезисний характер [1–4]. У роботах [5, 6] були запропоновані нелінійні нелокальні математичні моделі геосередовищ та досліджені їх автохвильові розв'язки без урахування гістерезисного характеру деформування середовищ. Нами ці моделі доповнені, враховуючи гістерезис при деформуванні геосередовищ, що приводить до такої математичної моделі:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho u_x = 0, \quad \rho \dot{u} + p_x = \gamma \rho^m, \\ \sigma \chi \rho^{-2} [-\rho_{xx}(1+a) + \rho_x^2 \rho^{-1}(1-na)] + h \chi \rho^{-2} [-\ddot{\rho}(1+a) + 2\dot{\rho}^2 \rho^{-1}(1-0,5a(n-1)) + \\ + \tau h^{-1} \dot{\rho}(1+a)] + \Phi_0(\rho) + \mu \Phi_1(p, \rho, \dot{\rho}) = p + \tau \dot{p} - h \ddot{p} - \sigma(p_{xx} + \rho_x p_x \rho^{-1}), \end{aligned} \quad (1)$$

де функції u — швидкість; p — тиск; ρ — густина середовища; $\gamma \rho^m$ — зовнішня масова сила; σ , h — параметри нелокальності; τ — час релаксації; χ , η , κ — пропорційні величини квадратам швидкостей звуку у середовищі; моноом $a = \delta n \rho^{n+1}$, зумовлений врахуванням температурної залежності стану середовища; $p = \Phi_0(\rho)$ — функція, яка описує рівноважний стан геосередовища; $(\dot{\cdot}) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + u \frac{\partial}{\partial x}(\cdot)$.

Рівноважну криву моделі (1) $\Phi_0(\rho)$ визначимо таким чином:

$$\Phi_0(\rho) = \begin{cases} p_0 + \kappa(\rho - \rho_0)^n, & \rho \geq \rho_0, \\ p_0 - \kappa|\rho - \rho_0|^n, & \rho < \rho_0, \end{cases} \quad p_0 = \kappa \rho_0^n. \quad (2)$$

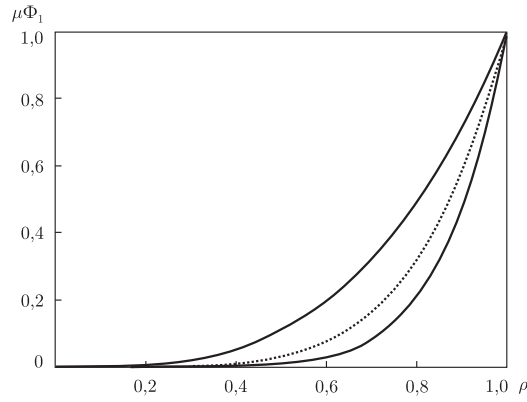


Рис. 1. Частина гістерезисної петлі, задана співвідношенням (3), при $n = 3,2$, $\rho_0 = 0$, $\rho^{\max} = 1$: суцільна лінія – $s = 7$, пунктирна – $s = 5$

Функція Φ_1 описує петлю пружного гістерезису поблизу рівноважного стану $(\rho_0; p_0)$ та задається співвідношенням

$$\Phi_1 = \begin{cases} (\rho - \rho_0)^n, & \rho > \rho_0, \quad \dot{\rho} < 0, \\ (\rho^{\max} - \rho_0)^{n-s}(\rho - \rho_0)^s, & \rho > \rho_0, \quad \dot{\rho} > 0, \end{cases} \quad \Phi_1(-x) = -\Phi_1(x) \quad (3)$$

(тут $s > n$).

Якщо зафіксувати тестові значення параметрів $n = 3,2$, $s = 7$, $\rho_0 = 0$, $\rho^{\max} = 1$, то частина гістерезисної петлі має вигляд, представлений на рис. 1, з характерною для геоматеріалів угнутістю. Параметр s пов'язаний з площею $2S$ фігури, обмеженою петлею, яка обчислюється за формулою

$$2S = (\rho^{\max} - \rho_0)^{n+1} \frac{s - n}{(n + 1)(s + 1)}.$$

Як показано на рис. 1 (пунктирна лінія), при зменшенні параметра s до n , площа петлі зменшується до 0. Параметр μ відіграє роль масштабного коефіцієнта.

Розглянемо вплив врахування петлі гістерезису, яка описується виразом (3), на структуру інваріантних розв'язків такого вигляду:

$$\rho = R(\omega), \quad p = P(\omega), \quad u = 2\xi t + U(\omega), \quad \omega = x - \xi t^2. \quad (4)$$

Після підстановки розв'язку рівностей (4) у систему диференціальних рівнянь з частинними похідними (1) отримуємо квадратуру

$$UR = C = \text{const}$$

та динамічну систему

$$\begin{aligned} R' &= W, & P' &= \gamma R^m - 2\xi R + \frac{C^2}{R^2} W, \\ W' &= - \left(R^3(\Phi_0 + \mu\Phi_1 - P) - P'(R^2\tau C + hC^2W - R^2\sigma W) + \gamma m R^{2+m}\sigma W + \right. \\ &\quad \left. + \chi LC\tau W + \gamma hm R^m C^2 W + h\chi L \left(\frac{CW}{R} \right)^2 - 2C^2\sigma W^2 + \chi M\sigma W^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2C^2 h U^2 W^2 + 2h\chi N U^2 W^2 - 2R^3\sigma W\xi - 2hRC^2 W\xi \right) ((C^2 - \chi L)R(\sigma + hU^2))^{-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

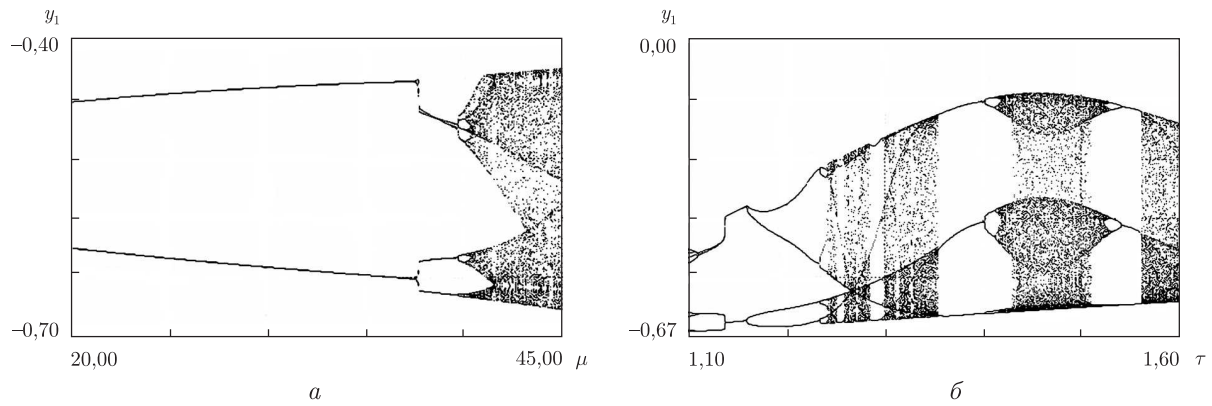


Рис. 2. Біфуркаційна діаграма Пуанкаре динамічної системи (5) без урахування петлі гістерезису при зростанні μ , $\tau = 1,1$ (а) та τ , $\mu = 40$ (б)

де $(\cdot)' = \frac{d}{d\omega}(\cdot)$, $L = 1 + a$, $M = 1 - an$, $N = 1 - 0,5a(n - 1)$, $a = \delta n R^{n+1}$,

$$\mu\Phi_1 = \begin{cases} (R - R_0)^n, & R - R_0 \geq 0, \quad CW < 0, \\ \max^{n-s}(R - R_0)^n, & R - R_0 \geq 0, \quad CW \geq 0 \end{cases}$$

($\max = \max\{R - R_0\}$ — локальний максимум функції $R(\omega) - R_0$).

Динамічна система (5) має єдину нетривіальну стаціонарну точку з координатами

$$R_0 = \left(\frac{2\xi}{\gamma}\right)^{1/m-1}, \quad P_0 = \kappa R_0^n, \quad W_0 = 0. \quad (6)$$

У попередніх дослідженнях такої системи [6] без урахування гістерезису, тобто $s = n$ та $\mu = 0$, в околі точки (6) при $\kappa = 40$, $h = 3,2$, $\xi = 0,28$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0,2$, $C = -2,8$, $\delta = 1,4$, $\chi = 10$, $n = m = 3,2$, $\tau = 1,1$ шляхом числового інтегрування динамічної системи (5) знайдено граничний цикл. Якщо $s = n$, $\mu \neq 0$, то вигляд стаціонарної кривої визначається виразом

$$\Phi_0(R) = \begin{cases} p_0 + (\kappa + \mu)(R - R_0)^n, & R \geq R_0, \\ p_0 - (\kappa + \mu)|R - R_0|^n, & R < R_0. \end{cases}$$

Залежність структури розв'язків формул (4) від зміни параметра μ вивчалася шляхом аналізу біфуркаційних діаграм Пуанкаре (рис. 2, а). Зокрема, при зростанні μ спостерігаються біфуркації подвоєння періоду початкового циклу, при цьому в інтервалі $\mu > 35$ структура атрактора зазнає більш різких змін, ніж очікувалось за сценарієм Фейгенбаума. Варіювання параметра τ , який характеризує релаксаційний процес, спричинює ускладнення структури періодичного атрактора, породжуючи на біфуркаційній діаграмі Пуанкаре (див. рис. 2, б) точки біфуркацій подвоєння періоду коливань та різких стрибків їх амплітуди, інтервали існування хаотичного атрактора в поєднанні з вікнами періодичності.

Надалі дослідимо як врахування гістерезисних втрат, що описуються параметрами μ у поєднанні з $s \neq n$, позначиться на граничному циклі та його біфуркаціях. Зафіксуємо

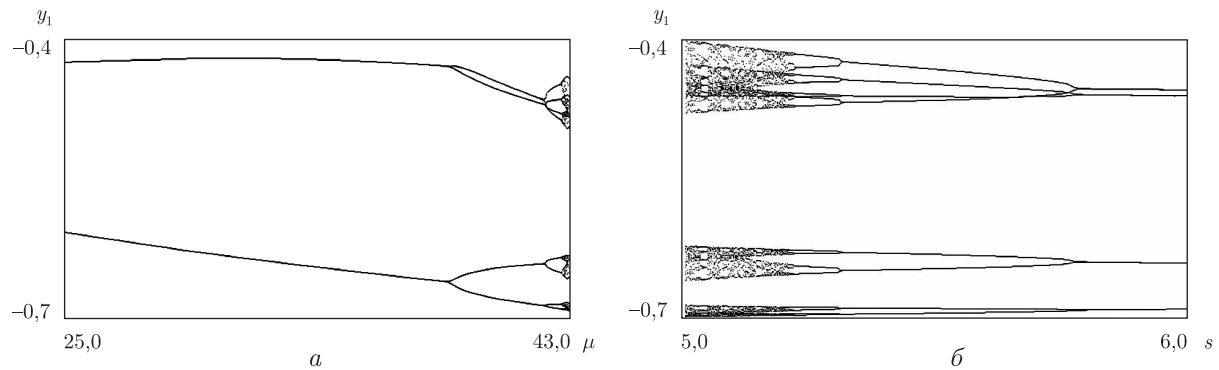


Рис. 3. Біфуркаційні діаграми розв'язків динамічної системи (5) з урахуванням петлі гістерезису: *a* — при зростанні параметра μ при $s = 5$; *б* — при зменшенні параметра $s \in [5, 6]$, $\mu = 43$

значення $s = 5$, $n = 3,2$, тоді при зростанні μ від 0 спостерігається збільшення діаметра граничного циклу та утворення циклу подвійного періоду, сценарій розвитку якого вивчався за допомогою біфуркаційної діаграми Пуанкаре (рис. 3, *a*). Порівнюючи діаграми рисунків 3, *a* і 2, *a*, відзначимо, що при врахуванні гістерезису розвиток хаотичного атратора відбувається при більших значеннях параметра μ з більш чіткою ідентифікацією біфуркацій подвоєння періоду. Зафіксуємо значення параметра $\mu = 40$, а s зменшуватимемо, починаючи із значення $s = 6,0$, коли у фазовому просторі динамічної системи знаходиться мультиперіодичний граничний цикл. Аналізуючи біфуркаційну діаграму (див. рис. 3, *б*) його розвитку при зменшенні s , можна виділити каскад біфуркацій подвоєння періоду циклу, що приводить до утворення хаотичного атратора.

Зазначимо, що на рис. 3 зображено лише область слаборозвиненого хаосу, яка визначається рамками правомірності використання аналітичного завдання петлі гістерезису (3). Дослідження динамічної системи (5) з гістерезисною нелінійністю ведеться до моменту, коли часова залежність $R(\omega)$ є простим циклічним режимом, тобто всі локальні максимуми та мінімуми лежать у різних півплощинах відносно стаціонарного стану R_0 . Довільне розташування екстремумів $R(\omega)$ породжує на діаграмі $p - \rho$ рис. 1 сукупність укладених гістерезисних петель, що вимагає іншої моделі для їх описання. Однак на основі проведених досліджень можна прогнозувати, що принаймні в малих інтервалах по параметрах μ та s хаотичні режими зберуться, що зумовлює зростання загальної площі петель, а значить, і величини розсіяної енергії в елементах структури. Візначимо також, що врахування динаміки релаксаційних процесів може спричинювати ускладнення локалізованих режимів у фазовому просторі динамічної системи як при зростанні параметра τ , так і при його зменшенні. Врахування ж гістерезисної петлі показує, що є такі значення площі фігури, обмеженої нею, після перевищення яких хаотичний атратор припиняє своє існування, а мультиперіодичний граничний цикл зазнає зворотного каскаду біфуркацій подвоєння періоду.

1. *Boitnott G. N.* Fundamental observations concerning hysteresis in the deformation of intact and joined rock with applications to nonlinear attenuation in the near source region // Proc. Numer. Model. Underground Nuclear Test Monitor. Symp. – 1993. – LA-UR – 93-3839. – P. 121-137.
2. *Hilbert Jr L. B., Hwang T. K., Cook N. G. W. et al.* Effects of strain amplitude on the static and dynamic nonlinear deformation of Berea sandstone // Rock Mechanics Models and Measurements Challenges from Industry / Ed. by P. P. Nelsonn, S. E. Laubach. – Rotterdam: Elsevier, 1994. – P. 497-515.
3. *Darling T. W., TenCate J. A., Brown D. W. et al.* Neutron diffraction study of the contribution of grain contacts to nonlinear stress-strain behavior // Geophys. Res. Lett. – 2004. – **31**. – L16604.

4. Johnson P. A., Rasolofosaon P. N. J. Manifestation of nonlinear elasticity in rock: convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies // Nonlin. Proc. in Geophys. – 1996. – No 3. – P. 77–88.
5. Даневич Т. Б., Даниленко В. А. Нелінійні нелокальні моделі багатокомпонентних релаксуючих середовищ з внутрішніми осциляторами // Доп. НАН України. – 2005. – № 1. – С. 106–110.
6. Danilenko V. A., Skurativskyy S. I. Invariant chaotic and quasi-periodic solutions of nonlinear nonlocal models of relaxing media // Rep. Math. Phys. – 2007. – 59, No 1. – P. 45–51.

Відділення геодинаміки вибуху
Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 22.04.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. A. Danilenko, S. I. Skurativskyy**

Autowave solutions of a nonlocal model of geophysical media with regard for the hysteretic character of their deformation

The nonlinear nonlocal mathematical models of geomedia are generalized by means of taking the hysteretic character of deformations of a medium into account. The dependence between bifurcations of a subset of autowave solutions of a nonlinear model and parameters of a hysteretic loop is analyzed with the help of methods of qualitative and numerical analyses.