УДК 517.9

П. О. Касьянов

Метод Фаедо–Гальоркіна для еволюційних включень з некоерцитивними W_λ-псевдомонотонними відображеннями

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)

Розглянуто клас диференціально-операторних включень I порядку з некоерцитивними W_λ-псевдомонотонними відображеннями. Методом Фаедо–Гальоркіна досліджено проблему існування розв'язання задачі Коші для даних включень. Отримано важливі апріорні оцінки розв'язків та їх похідних. Досліджено залежність множини розв'язків від параметра. Наведено приклад, що ілюструє запропонований підхід до дослідження розглянутої проблеми.

Диференціально-операторні рівняння, включення та еволюційні варіаційні нерівності є об'єктом інтенсивних досліджень упродовж останніх десятиліть. Далеко не повний перелік публікацій у цій області складають такі відомі монографії, як [1–8] та багато інших. Інтерес до таких об'єктів обумовлений у першу чергу їх широким практичним застосуванням. Зазвичай їх пов'язують із задачами математичної фізики, з диференціальними рівняннями в частинних похідних, диференціальні оператори яких допускають розрив за фазовою змінною, з диференціальними рівняннями з розривною правою частиною, із задачами теорії керування та оптимізації та ін. У фізиці та механіці імпульсом до вивчення еволюційних рівнянь та включень стали прикладні задачі, пов'язані з фазовими переходами й односторонньою провідністю границь речовин, поширенням електромагнітних, акустичних, вібро-, гідро- та сейсмоакустичних хвиль, квантово-механічними ефектами тощо [2, 3, 7, 9]. Останні дослідження з даного напрямку охоплюють квазілінійні рівняння з однорідними крайовими умовами або лінеаризовані рівняння з нелінійними умовами на межі області, що зводяться до нелінійних диференціально-операторних рівнянь та включень. Проте лінеаризовані об'єкти не завжди адекватно описують досліджуваний процес. Тому виникає необхідність у дослідженні еволюційних включень та варіаційних нерівностей з принципово вужчим набором властивостей. У роботі [1] розглядались такі об'єкти для некоерцитивних монотонних відображень, у роботах [10, 11] — для відображень з напівобмеженою варіацією. Диференціально-операторні включення з некоерцитивними W_λ-псевдомонотонними відображеннями до цього часу систематично не вивчались.

У даній роботі розглядаються еволюційні включення I порядку з некоерцитивними W_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями. Наше завдання полягає у розвиненні некоерцитивної теорії для даних об'єктів, а також в одержанні нових результатів про розв'язність, дослідженні множини розв'язків від параметра та обгрунтуванні методу Фаедо–Гальоркіна. Одержані в даній роботі результати є новими як для еволюційних рівнянь, так і для включень.

1. Постановка задачі. Нехай V — рефлексивний банахів простір над полем дійсних чисел; H — гільбертів простір над полем дійсних чисел зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, ототожнений зі спряженим простором H^*; $\{V_\sigma\}_{\sigma\geqslant 0}$ — ланцюжок гільбертових просторів над полем дійсних чисел такий, що $\forall\,\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant 0$ $V_{\sigma_1} \subset V_{\sigma_2}$, причому вкладення неперервне та щільне. Нехай вкладення $V \subset H$ компактне. Припустимо також, що $\exists\sigma_0 > 0$ таке, що $\forall\,\sigma \geqslant \sigma_0$ $V_\sigma \subset V$ неперервно та щільно. Тоді для всіх $\sigma \geqslant \sigma_0$ одержимо такий ланцюжок неперервних та щільних вкладень:

$$V_\sigma \subset V \subset H \subset V^* \subset V_\sigma^*,$$

де V^* — спряжений до V простір, V_σ^* — спряжений до V_σ простір відносно $(\cdot,\cdot)$. Зауважимо, що $V_0 \equiv H$. Введемо позначення $S = [0,T]$ — скінченний інтервал часу,

$$X = L_{p_0}(S;H)\bigcap L_p(S;V), \qquad X_\sigma = L_{p_0}(S;V_\sigma),$$
$$X^* = L_{q_0}(S;H) + L_q(S;V^*), \qquad X_\sigma^* = L_{q_0}(S;V_\sigma^*),$$
$$Y \equiv Y^* = L_2(S;H),$$

де $p_0 \geqslant 2$, $1 < p \leqslant p_0$, $1/p_0 + 1/q_0 = 1/p + 1/q = 1$.

Лінійний простір $W = \{y \in X \mid y' \in X^*\}$ (відповідно, $W_\sigma = \{y \in X \mid y' \in X_\sigma^*\}$) є рефлексивним банаховим простором відносно норми $\|y\|_W = \|y\|_X + \|y'\|_{X^*}$ (відповідно, $\|y\|_{W_\sigma} = \|y\|_X + \|y'\|_{X_\sigma^*}$), де y' — похідна від елемента $y \in X$ у сенсі простору скалярних розподілів $\mathcal{D}^*(S;V_\sigma^*)$ [1].

Для довільних $v \in X$ та $f \in X^*\colon f = f_0 + f_1$, $f_0 \in L_{q_0}(S;H)$, $f_1 \in L_q(S;V^*)$ розглянемо

$$\langle f,v\rangle = \langle f,v\rangle_X = \int\limits_S (f_0(\tau),v(\tau))_H\,d\tau + \int\limits_S \langle f_1(\tau),v(\tau)\rangle_V\,d\tau = \int\limits_S (f(\tau),v(\tau))\,d\tau.$$

Тут $\langle\cdot,\cdot\rangle_V\colon V^* \times V \to \mathbb{R}$ — канонічне спарювання, що збігається на $H \times V$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ в H.

Нехай Z — деякий нормований простір, $U \subset Z$ — непорожня множина. Зафіксуємо $u \in U$. Для багатозначних (у загальному випадку) відображень $A\colon X \rightrightarrows X^*$, $B\colon X\times U \rightrightarrows X^*$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} y' + A(y) + B(y,u) \ni f, \\ y(0) = \overline{0}, \qquad y \in W \subset C(S;H), \end{cases} \tag{1}$$

де $f \in X^*$ — довільний фіксований елемент. Метою цієї роботи є дослідження базових властивостей розв'язуючого оператора та обгрунтування розв'язності даної проблеми за допомогою методу Фаедо–Гальоркіна.

2. Клас $\boldsymbol{\mathcal{H}(X^*)}$. Через $\mathcal{H}(X^*)$ позначимо сукупність підмножин X^* з такою властивістю: $B \in \mathcal{H}(X^*)$, якщо для довільної вимірної множини $E \subset S$ та довільних $u, v \in B$ виконується, що $u + (v-u)\chi_E \in B$. Тут і далі для $d \in X^*$

$$(d\chi_E)(\tau) = d(\tau)\chi_E(\tau) \text{ для м.в. } \tau \in S,$$

$$\chi_E(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in E, \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases}$$

Лема 1. *$B \in \mathcal{H}(X^*)$ тоді і тільки тоді, коли $\forall n \geqslant 1$, $\forall \{d_i\}_{i=1}^n \subset B$ та довільних вимірних попарно неперетинних підмножин $\{E_j\}_{j=1}^n$ множини S: $\bigcup\limits_{j=1}^n E_j = S$ виконується, що $\sum\limits_{j=1}^n d_j \chi_{E_j} \in B$.*

Зауважимо, що $\varnothing$, $X^* \in \mathcal{H}(X^*)$; $\forall f \in X^*$ $\{f\} \in \mathcal{H}(X^*)$; якщо $K\colon S \rightrightarrows V^*$ — довільне багатозначне відображення, то

$$\{f \in X^* \mid f(t) \in K(t) \text{ для м.в. } t \in S\} \in \mathcal{H}(X^*).$$

3. Класи багатозначних відображень. Розглянемо тепер основні класи багатозначних відображень. Нехай Y — деякий рефлексивний банахів простір над полем дійсних чисел, Y^* — його топологічно спряжений простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y\colon Y^* \times Y \to \mathbb{R}$ — спарювання, $A\colon Y \rightrightarrows Y^*$ — строге багатозначне відображення, тобто $A(y) \neq \varnothing$ $\forall y \in X$. Для нього визначимо верхню $[A(y), \omega]_+ = \sup\limits_{d \in A(y)} \langle d, w \rangle_X$ і нижню $[A(y), \omega]_- = \inf\limits_{d \in A(y)} \langle d, w \rangle_X$ опорні функції, де y, $\omega \in X$, а також верхню $\|A(y)\|_+ = \sup\limits_{d \in \mathcal{A}(y)} \|d\|_{X^*}$ і нижню $\|A(y)\|_- = \inf\limits_{d \in \mathcal{A}(y)} \|d\|_{X^*}$ норми [3]. Позначимо через $C_v(Y)$ сім'ю всіх непорожніх замкнених опуклих обмежених підмножин з простору Y. Далі, $y_n \rightharpoonup y$ в Y буде означати, що y_n слабко збігається до y в Y.

Нехай W — деякий нормований простір, неперервно вкладений в Y. Розглянемо параметризоване багатозначне відображення $A\colon Y \times U \rightrightarrows Y^*$.

Означення 1. Строге багатозначне відображення $A\colon Y \times U \rightrightarrows Y^*$ називається:

λ_0-квазімонотонним на $W \times U$, якщо для будь-якої послідовності $\{y_n, a_n\}_{n \geqslant 0} \subset W \times U$ такої, що $y_n \rightharpoonup y_0$ в W, $a_n \to a_0$ в Z, $d_n \rightharpoonup d_0$ в Y^* при $n \to +\infty$, де $d_n \in \overline{\mathrm{co}} A(y_n, a_n)$ $\forall n \geqslant 1$, із нерівності $\varlimsup\limits_{n \to \infty} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_Y \leqslant 0$ випливає існування підпослідовності $\{y_{n_k}, d_{n_k}\}_{k \geqslant 1}$ з $\{y_n, d_n\}_{n \geqslant 1}$, для якої виконується

$$\varliminf_{k \to \infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w \rangle_Y \geqslant [A(y_0, a_0), y_0 - w]_- \qquad \forall w \in Y;$$

обмеженим, якщо для кожного $L > 0$ існує таке $l > 0$, що

$$\|A(y, u)\|_+ \leqslant l \quad \forall \{y, u\} \in Y \times U\colon \|y\|_Y \leqslant L, \qquad \|u\|_Z \leqslant L;$$

демізамкненим, якщо з того, що $\{u_n\}_{n \geqslant 0} \subset U$, $u_n \to u_0$ в Z, $y_n \to y_0$ в Y, $d_n \rightharpoonup d_0$ в Y^*, де $d_n \in A(y_n, u_n)$, $n \geqslant 1$, випливає, що $d_0 \in A(y_0, u_0)$.

Міркуваннями, аналогічними до доведення леми 1 із [12], можна одержати лему про λ_0-квазімонотонність суми λ_0-квазімонотонних обмежених багатозначних відображень.

Лема 2. *Нехай A, $B\colon Y \times U \rightrightarrows Y^*$ — строгі обмежені λ_0-квазімонотонні на $W \times U$ багатозначні відображення. Тоді строге багатозначне відображення $C = A + B\colon Y \times U \rightrightarrows Y^*$ є також обмеженим і λ_0-квазімонотонним на $W \times U$.*

Кожному багатозначному відображенню $A\colon Y \rightrightarrows Y^*$ поставимо у відповідність параметризоване багатозначне відображення $\widehat{A}\colon Y \times U \rightrightarrows Y^*$ у такий спосіб: $\widehat{A}(y, u) = A(y)$, $y \in Y$, $u \in U$.

Означення 2. Строге багатозначне відображення $A\colon Y \rightrightarrows Y^*$ називається:

λ_0-*псевдомонотонним* на W, якщо відповідне $\widehat{A}\colon Y \times U \rightrightarrows Y^*$ є λ_0-квазімонотонним на $W \times U$;

обмеженим, якщо відповідне $\widehat{A}\colon Y \times U \rightrightarrows Y^*$ є обмеженим.

Зауваження 1. Ідея переходу до підпослідовності в означенні однозначного псевдомонотонного оператора була запропонована І. В. Скрипником у роботі [13].

Означення 3. Строге багатозначне відображення $A\colon X \rightrightarrows X^*$ називається:

оператором типу Вольтерра, якщо для довільних u, $v \in X$, $t \in S$ із рівності $u(s) = v(s)$ для м. в. $s \in [0,t]$ випливає, що $[A(u), \xi_t]_+ = [A(v), \xi_t]_+ \ \forall\, \xi_t \in X\colon \xi_t(s) = 0$ для м. в. $s \in S\backslash[0,t]$;

$+(-)$-*коерцитивним*, якщо існує дійсна функція $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ така, що $\gamma(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$ та $[A(y), y]_{+(-)} \geqslant \gamma(\|y\|_X)\|y\|_X \ \forall\, y \in X$.

4. Метод Фаедо–Гальоркіна. Нехай $\{h_i\}_{i\geqslant 1}$ — повна система лінійно незалежних елементів з V_σ для деякого $\sigma \geqslant \sigma_0$ і нехай H_n — лінійна оболонка множини $\{h_i\}_{i=1}^n$, наділена скалярним добутком, індукованим з H. Згідно з попередніми міркуваннями, H_n^* — спряжений до H_n простір, ототожнений із самим H_n; $X_n := L_{p_0}(S; H_n)$, $X_n^* = L_{q_0}(S; H_n)$ — спряжений до X_n простір відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X_n} = \langle\cdot,\cdot\rangle_X|_{X_n^*\times X_n}$, $Y_n \equiv Y_n^* = L_2(S; H_n)$, $W_n := \{y \in X_n \mid y' \in X_n^*\}$, де похідну y' від елемента $y \in X_n$ розуміємо в сенсі простору розподілів $\mathcal{D}^*(S, H_n)$. Для довільного $n \geqslant 1$ нехай $I_n \in \mathcal{L}(X_n; X)$ — канонічне вкладення X_n в X, I_n^* — спряжений оператор до I_n. Позначимо через P_n оператор ортогонального проектування з H в H_n. Припустимо, що для деякого $\sigma \geqslant \sigma_0$ даний оператор задовольняє такі умови:

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}(H;H)} \leqslant 1, \qquad \|P_n\|_{\mathcal{L}(V_\sigma;V_\sigma)} \leqslant 1, \qquad \|P_n\|_{\mathcal{L}(V_\sigma^*;V_\sigma^*)} \leqslant 1. \tag{2}$$

Зауважимо, що як повну систему векторів $\{h_j\}_{j\geqslant 1}$, що задовольняє (2), можемо взяти так званий "спеціальний базис" для пари $(V_\sigma;\ H)$ (дет. див. [4, 8]). Зауважимо також, що для всіх $n \geqslant 1$, $f \in X^*$ і для м. в. $t \in S$ $(I_n^* f)(t) = P_n f(t)$.

Нехай $\{u_n\}_{n\geqslant 1} \subset U$, $u_n \to u$ в Z. Розв'язки задачі (1) будемо "наближати" розв'язками таких задач:

$$\begin{cases} y_n' + A_n(y_n) + B_n(y_n, u_n) \ni f_n, \\ y_n(0) = \overline{0}, \qquad y_n \in W_n, \end{cases}$$

де $A_n := I_n^* A I_n\colon X_n \rightrightarrows X_n^*$, $B_n(\cdot, u_n) := I_n^* B(\cdot, u_n) I_n\colon X_n \rightrightarrows X_n^*$, $f_n := I_n^* f \in X_n^*$.

5. Основні результати. Для доведення розв'язності задачі (1) нам знадобиться ряд допоміжних тверджень, які мають самостійне значення. Далі нехай $I\colon X \to X^*$ — тотожне відображення. Зафіксуємо $\lambda \in \mathbb{R}$. Покладемо $\varphi_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$, $t \in S$. Для довільного $y \in X^*$ означимо y_λ (як відображення з S в V^*) у такий спосіб: $y_\lambda(t) = \varphi_\lambda(t) y(t)$ для м. в. $t \in S$. Зауважимо, що $\forall\, y \in X^*$ $(y_\lambda)_{-\lambda} = y$. Визначимо також елемент $\varphi_\lambda y\colon (\varphi_\lambda y)(t) = y(t)\varphi_\lambda(t)$ для м. в. $t \in S$.

Розглянемо багатозначне відображення $\mathcal{A}\colon X \to C_v(X^*)$. Для фіксованого $y \in X$ множину $\mathcal{A}_\lambda(y_\lambda) \in C_v(X^*)$ визначимо за допомогою співвідношення

$$[\mathcal{A}_\lambda(y_\lambda), \omega]_+ = [\mathcal{A}(y) + \lambda y, \omega_\lambda]_+ \qquad \forall\, \omega \in X.$$

Зауважимо, що оскільки функціонал $\omega \longmapsto [\mathcal{A}(y) + \lambda y, \omega_\lambda]_+$ півадитивний, додатно однорідний та напівнеперервний знизу як супремум лінійних неперервних функціоналів, то $\mathcal{A}_\lambda(y_\lambda)$ визначена коректно.

Твердження 1. *Нехай* $\mathcal{A}\colon X \to C_v(X^*) \bigcap \mathcal{H}(X^*)$ — *обмежене відображення вольтеррівського типу таке, що для деякого* $\lambda_A \geqslant 0$ $\mathcal{A} + \lambda_A I$ *є* $+$*-коерцитивним. Для деяких* λ_B, $\alpha \geqslant 0$ *припустимо, що вольтеррівське за першою змінною багатозначне відображення* $B\colon X \times U \to C_v(X^*) \bigcap \mathcal{H}(X^*)$ *задовольняє нерівність*

$$[B(y,a) + \lambda_B y, y]_+ \geqslant -\alpha(1 + \|y\|_X) \qquad \forall\, y \in X, \qquad \forall\, a \in U.$$

Тоді існує число $\beta > 0$ та обмежена знизу на обмежених множинах дійсна неспадна функція $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ така, що $\gamma(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$ і

$$\sup_{d \in \mathcal{A}(y) + B(y,a)} \int\limits_0^T e^{-2\lambda\tau}(d(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau))\, d\tau \geqslant \gamma(\|y\|_X)\|y\|_X - \beta \qquad \forall\, y \in X, \qquad \forall\, a \in U.$$

Тут $\lambda = \lambda_A + \lambda_B$.

Розглянемо тепер багатозначні відображення, які діють із X_m в X_m^*, $m \geqslant 1$. Зауважимо, що вкладення $X_m \subset Y_m \subset X_m^*$ неперервні, а вкладення W_m в X_m компактне [4, c. 70]. За рахунок компактності вкладення W_m в X_m, можна одержати такий результат.

Твердження 2. *Якщо багатозначне відображення* $\mathcal{A}\colon X_m \to C_v(X_m^*)$ *є* λ_0*-псевдомонотонним на* W_m*, то* $\mathcal{A}_\lambda$ *є також* λ_0*-псевдомонотонним на* W_m.

Для фіксованих $u \in U$ та $f \in X^*$ через $K(u,f)$ позначимо множину всіх розв'язків задачі (1). Нижченаведений результат стосується розв'язності, залежності розв'язків від параметра та обгрунтування методу Фаедо–Гальоркіна для задачі (1).

Теорема 1. *Нехай* $A\colon X \to C_v(X^*) \bigcap \mathcal{H}(X^*)$ — λ_0*-псевдомонотонне на* W_σ *обмежене відображення типу Вольтерра;* $B\colon Y \times U \to C_v(Y^*) \bigcap \mathcal{H}(Y^*)$ — *вольтеррівське за першою змінною, демізамкнене багатозначне відображення, яке задовольняє умову "не більш ніж лінійного росту":*

$$\exists c > 0\colon \|B(y,u)\|_+ \leqslant c(1 + \|y\|_Y) \qquad \forall\, \{y,u\} \in Y \times U.$$

Припустимо також, що для деякого $\sigma \geqslant \sigma_0$ *виконується (2) та для деякого* $\lambda_A \geqslant 0$ *відображення* $A + \lambda_A I$ *є* $+$*-коерцитивним. Тоді для довільних* $u \in U$ *та* $f \in X^*$ *існує принаймні один розв'язок задачі (1), який можна одержати за допомогою методу Фаедо–Гальоркіна. Більше того, якщо* $\{u_n\}_{n \geqslant 0} \subset U$, $u_n \to u_0$ *в* Z, $f_n \to f_0$ *в* X^**, то*

$$\bigcap_{n \geqslant 1} \overline{\bigcup_{m \geqslant n} K(u_m, f_m)}^{X_w} \subset K(u_0, f_0).$$

Тут $\overline{M}^{X_w}$ — *слабке замикання множини* $M \subset X$ *в* X.

6. Приклад. Розглянемо модельний приклад еволюційного включення I порядку, який частково зображує одержані результати.

Нехай Ω із $\mathbb{R}^n$ — обмежена область з регулярною границею $\partial\Omega$ [1], $S = [0; T]$, $Q = \Omega \times S$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times S$, $p = p_0 = q = 2$. Для $j = 1, 2$ розглянемо відображення: $\theta_j\colon S \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Припустимо, що $\forall\, y \in \mathbb{R}$ відображення $\{t,x\} \to \theta_j(t,x,y)$ вимірне на Q. Нехай також для м. в. $\{t,x\} \in Q$ відображення $y \to \theta_j(t,x,y)$ напівнеперервне знизу на $\mathbb{R}$, якщо $j = 1$, а якщо $j = 2$, то $y \to \theta_j(t,x,y)$ напівнеперервне зверху на $\mathbb{R}$. Припустимо, що для деякого $C \geqslant 0$, для кожного $y \in \mathbb{R}$ та для м. в. $\{t,x\} \in Q$

$$-C(1 + |y|) \leqslant \theta_1(t,x,y) \leqslant \theta_2(t,x,y) \leqslant C(1 + |y|).$$

Визначимо $\Phi\colon S \times \Omega \times \mathbb{R} \to C_v(\mathbb{R})$ у такий спосіб: $\forall\, y \in \mathbb{R}$ та для м. в. $\{t, x\} \in Q$

$$\Phi(t, x, y) = [\theta_1(t, x, y), \theta_2(t, x, y)].$$

Для довільного $f \in L_2(S; H^{-1}(\Omega))$ розглянемо задачу

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \triangle y(x,t) + \Phi(t, x, y(x,t)) \ni f(x,t) \quad \text{м. с. на } Q,$$

$$y(x,0) = 0 \quad \text{м. с. на } \Omega, \qquad y(x,t) = 0 \quad \text{м. с. на } \Gamma_T.$$

Покладемо $V = H_0^1(\Omega)$ — простір Соболєва [1], $H = L_2(\Omega)$, $V^* = H^{-1}(\Omega)$, $V_\sigma = H_0^\sigma(\Omega)$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_0 \geqslant 1$, $X = L_2(S, V)$, $Y = L_2(Q)$.

Визначимо $D\colon L_2(Q) \rightrightarrows L_2(Q)$ так:

$$D(u) = \{v \in L_2(Q) | v(x,t) \in \Phi(t, x, u(x,t)) \text{ для м. в.} \{x,t\} \in Q\}, \qquad u \in L_2(Q).$$

Твердження 3. *За перерахованих вище умов* $D\colon L_2(Q) \to C_v(L_2(Q)) \bigcap \mathcal{H}(L_2(Q))$ — *демізамкнене багатозначне відображення, яке задовольняє умову*

$$\exists c > 0\colon \|D(y)\|_+ \leqslant c(1 + \|y\|_Y) \qquad \forall\, y \in Y.$$

Визначимо відображення $A\colon X \to X^*$. Для довільного $u \in X$ $(Au)(t) = C(u(t))$ для м. в. $t \in S$, $C\colon V \to V^*$ — енергетичне розширення оператора $-\Delta$ [1, 10, 11]. Як демізамкнений оператор $B\colon Y \to C_v(Y) \bigcap \mathcal{H}(Y)$ візьмемо оператор D. Внаслідок твердження 3 з роботи [14] та перерахованих вище умов справедлива така теорема.

Теорема 2. *Для довільного* $f \in X^*$ *існує принаймні один розв'язок* $y \in C(S; H)$ *задачі* (3), *який можна одержати за допомогою методу Фаедо–Гальоркіна.*

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 337 с.
2. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. думка, 1998. – 614 с.
3. *Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – Киев: Наук. думка, 2004. – 590 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 587 с.
5. *Чикрий А. А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 381 с.
6. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Yasinsky V. V.* Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with W_λ-pseudomonotone maps. – Київ: Наук. думка, 2007. – 308 с.
7. *Sell G. R., You Yu.* Dynamics of evolutionary equations. – Berlin: Springer, 2002. – 452 p.
8. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer, 1988. – 643 p.
9. *Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
10. *Задоянчук Н. В., Касьянов П. О.* Метод Фаедо–Гальоркіна для нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з операторами Вольтера // Нелінійні коливання. – 2007. – № 2. – С. 204–228.
11. *Задоянчук Н. В., Касьянов П. О.* Метод Фаедо–Гальоркіна для нелінійних еволюційних рівнянь II порядку з операторами W_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Доп. НАН України. – 2006. – № 12. – С. 15–19.

12. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* Метод Фаедо–Гальоркіна для диференціально-операторних включень в банахових просторах з відображеннями w_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 1. – С. 103–126.

13. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных элиптических граничных задач. – Москва: Наука, 1990. – 442 с.

14. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* О разрешимости дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств, порожденных отображениями w_{λ_0}-псевдомонотонного типа // Укр. мат. вісн. – 2007. – **4**, № 4. – С. 535–581.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 09.06.2008

P. O. Kasyanov

The Faedo–Galerkin method for evolution inclusions with noncoercive W_λ-pseudomonotone maps

We consider the first-order differential-operator inclusions with noncoercive W_λ-pseudomonotone noncoercive maps. The problem of the existence of solutions for the Cauchy problem for the given inclusions is investigated by using the Faedo–Galerkin method. The important a priori estimates for solutions and their derivatives have been obtained. The dependence on a parameter for the set of solutions is considered. An example illustrating the given approach is given.