УДК 519.6

О. М. Литвин, С. І. Кулик

Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Пропонується новий метод обчислення коефіцієнтів Фур'є при математичному моделюванні в комп'ютерній томографії тригонометричними поліномами Фур'є або Фейєра. Метод полягає в заміні проекцій (інтегралів від функції $f(x, y)$ вздовж заданого набору напрямків) відповідними сумами вейвлетів. Розглянуто приклади.

Методи комп'ютерної томографії на сьогодні є найбільш ефективними при дослідженні внутрішньої структури тривимірного тіла без його руйнування і знаходять застосування у все більшій і більшій кількості наукових та технічних сфер діяльності людини — медицині, астрономії, астрофізиці та фізиці атмосфери Землі, при діагностиці плазми, у радіолокації, оптиці, при аналізі теплообміну в поверхневому шарі океану, у геології, геофізиці, фізіології, при неруйнівному контролі якості об'єктів (дефектоскопії), у мікроскопії та інших галузях науки і техніки.

У більшості алгоритмів розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії використовують пряме та обернене перетворення Радона. Їх аналіз показує, що задачу оптимізації кількості проекцій для відновлення функцій із заданих класів (тобто відновлення об'єктів з характеристиками, що описуються функціями із заданих класів) поки що не розв'язано. Таким чином, актуальною є задача розробки і дослідження нових методів розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії (зокрема, рентгенівської), які можуть використовувати нетрадиційні схеми сканування.

Метою даної роботи є розробка та дослідження нового методу наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням вейвлетів та проекцій із спеціально сконструйованою системою сканування, тісно пов'язаною з формулою для коефіцієнтів Фур'є.

У роботі [1] (див. також [2, 3]) запропоновано і досліджено новий метод розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії. В основі методу лежать оригінальні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою проекцій вздовж деякої системи ліній, що перетинають об'єкт дослідження. Важливими особливостями вказаного методу є система сканування, тісно пов'язана з формуванням для коефіцієнтів Фур'є, відмінна від існуючих [4–6], та заміна тригонометричних функцій кусково-сталими сплайнами найкращого рівномірного наближення.

У даній роботі коефіцієнти Фур'є обчислюються за допомогою проекцій шляхом використання вейвлетів. Наводяться явні вирази для обчислення коефіцієнтів Фур'є, а також приклади.

Деякі допоміжні твердження. Будемо використовувати такі формули.

Лема 1. *При обчисленні коефіцієнтів Фур'є $C_{k,l}$ для $k=0$, $l=0$; $k>0$, $l=0$; $k=0$, $l>0$ за допомогою проекцій (даних Радона) справедливі такі рівності:*

$$C_{00}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^1\gamma 2(y)\,dy, \qquad \gamma 2(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx; \tag{1}$$

$$C_{k,0}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)e^{-i2\pi kx}dxdy=\int\limits_0^1\gamma 1(x)e^{-i2\pi kx}dx, \qquad \gamma 1(x)=\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy; \tag{2}$$

$$C_{0,l}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)e^{-i2\pi ly}dxdy=\int\limits_0^1\gamma 2(y)e^{-i2\pi ly}dy. \tag{3}$$

При $k<0$ маємо $C_{-|k|,0}=\overline{C_{|k|,0}}$; $C_{0,-|l|}=\overline{C_{0,|l|}}$.

Для $k\geqslant 1$, $l\geqslant 1$:

1) при $k\geqslant l$: $C_{k,l}=I_1+I_2+I_3$,

$$I_1=l\int\limits_0^1\frac{F_1(ul)e^{-i2\pi ul}du}{k^2+l^2}, \qquad I_2=\frac{k-l}{k^2+l^2}\int\limits_0^1 e^{-i2\pi[l+z(k-l)]}F_2(l+z(k-l))\,dz,$$

$$I_3=l\int\limits_0^1\frac{F_3(k+zl)e^{-i2\pi(k+zl)}}{k^2+l^2}dz,$$

де

$$F_1(t)=\int\limits_{-\frac{l}{k}t}^{\frac{k}{l}t} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv, \qquad F_2(t)=\int\limits_{-\frac{l}{k}t}^{\frac{k^2+l^2-lt}{k}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv,$$

$$F_3(t)=\int\limits_{\frac{1}{l}[-k^2-l^2+kt]}^{\frac{1}{k}[k^2+l^2-lt]} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2},\frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right)dv;$$

2) при $k<l$: $C_{k,l}=I_1+I_2+I_3$;

3) при $k\geqslant l>0$: $C_{k,-l}=I_1+I_2+I_3$;

4) при $0<k<l$: $C_{k,-l}=I_1+I_2+I_3$, можна написати аналогічні формули.

Для значень k, l, що задовольняють умови k, $l\leqslant -1$, виконується рівність

$$C_{-k,-l}=\overline{C_{k,l}}; \qquad C_{-k,l}=\overline{C_{k,-l}} \tag{4}$$

Відзначимо, що наведені вище функції F_μ, $\mu=1,2,3$, є проекціями, отриманими інтегруванням функції $f(x,y)$ вздовж прямих, що перетинають квадрат $[0,1]^2$ і проходять паралельно прямим $kx+ly=t$. На практиці вказані експериментальні дані можуть бути отримані за допомогою комп'ютерного томографа для дискретного набору значень змінної t.

Метод, що пропонується у даній роботі, полягає у заміні вказаних функцій F_μ скінченними сумами вейвлетів, коефіцієнти яких використовують для обчислення значення функцій F_μ у дискретних наборах їх аргументів.

Основні твердження. У теоремі 1 наведені явні вирази для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є запропонованим методом шляхом заміни функцій F_μ скінченними сумами вейвлетів Хаара.

Теорема 1. *Для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є із використанням вейвлетів Хаара за допомогою дискретного набору проекцій справедливі формули*

$$C_{0,0} \approx C_{0,0,M} = \frac{1}{M}\sum_{p=1}^{M}\gamma 1_p = \frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}\gamma 2_q, \qquad C_{k,0} \approx C_{k,0,M} = \sum_{p=1}^{M}\gamma 1_p e^{-i\frac{p}{M}},$$

$$C_{0,l} \approx C_{0,l,M} = \sum_{q=1}^{M}\gamma 2_q e^{-i\frac{q}{M}}, \qquad C_{k,l} \approx C_{k,l,N} = I_{k,l,N_1} + I_{k,l,N_2} + I_{k,l,N_3}, \qquad k \geqslant l \geqslant 1,$$

$$I_{k,l,N_1} = \frac{l}{k^2+l^2}\left(\frac{e^{-i2\pi\frac{l}{N_1}}-1}{-i2\pi l}\right)\sum_{q=0}^{N_1-1}\widetilde{F_1}\left(\frac{z_q+z_{q+1}}{2}\right)e^{-i2\pi\frac{q}{N_1}l},$$

$$\widetilde{F_1}(z) = F_1(zl), \qquad z_q = \frac{q}{N_1},$$

$$I_{k,l,N_2} = \frac{k-l}{k^2+l^2}\left(\frac{e^{-i2\pi\frac{k-l}{N_2}}-1}{-i2\pi(k-l)}\right)\sum_{q=0}^{N_2-1}\widetilde{F_2}\left(\frac{z_q+z_{q+1}}{2}\right)e^{-i2\pi\frac{q}{N_2}(k-l)}, \qquad \textit{якщо} \qquad k > l;$$

$$I_{k,k,N_2} = 0; \qquad \widetilde{F_2}(z) = F_2(l + z(k-l)), \qquad z_q = \frac{q}{N_2},$$

$$I_{k,l,N_3} = \frac{l}{k^2+l^2}\left(\frac{e^{-i2\pi\frac{l}{N_3}}-1}{-i2\pi l}\right)\sum_{q=0}^{N_3-1}\widetilde{F_3}\left(\frac{z_q+z_{q+1}}{2}\right)e^{-i2\pi\frac{q}{N_3}l},$$

$$\widetilde{F_3}(z) = F_3(k+zl), \qquad z_q = \frac{q}{N_3}.$$

Аналогічні формули можна написати також для $C_{k,l}$ при $k < l$; $C_{k,-l}$ при $k > l$ та $k < l$. Числа N_1, N_2, N_3 задавались за такими формулами ($l \geqslant k$): $N_1 = kN$, $N_2 = (l-k)N$, $N_3 = kN$, де N — число, вибором якого досягається потрібна точність. В основі методу отримання цих формул лежить метод Файлона (див., напр., [7, с. 207]).

Теорема 2. *Похибка* $|C_{k,l} - C_{k,l,N}|$ *наближення коефіцієнтів Фур'є* $C_{k,l}$ *для функцій* $f(x,y) \in C^r[0,1]^2$ *формулами* $C_{k,l,N}$ *для випадку, коли функції* F_μ, $\mu = 1,2,3$, *наближуються вейвлетами* W_{μ,N_μ}, *справедлива оцінка зверху:*

$$|C_{k,l} - C_{k,l,N}| \leqslant \|F_\mu(\cdot) - W_{\mu,N_\mu}(\cdot)\|_{C[0,1]}.$$

За даним методом проведений обчислювальний експеримент, у якому для візуалізації $f(x,y)$ використовувались суми Фур'є

$$SF(x,y,N) = \sum_{k=-N}^{+N}\sum_{\ell=-N}^{+N} c_{k,\ell}e^{i2\pi(kx+\ell y)}$$

і Фейєра

$$SFE(x,y,N) = \sum_{k=-N}^{+N} \sum_{\ell=-N}^{+N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right)\left(1 - \frac{|l|}{N+1}\right) c_{k,\ell} e^{i2\pi(kx+\ell y)}.$$

Приклади. У наведених нижче прикладах використовувались розклади функцій F_μ, $\mu = 1, 2, 3$, за сумами вейвлетів Хаара, коефіцієнти яких обчислювались за допомогою формул центральних прямокутників. Для тестування вибирались такі функції:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1, & |x-0{,}5| \leqslant a, \quad |y-0{,}5| \leqslant b, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} ((x-0{,}5)^2 - a^2)((y-0{,}5)^2 - b^2), & |x-0{,}5| \leqslant a, \quad |y-0{,}5| \leqslant b, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$f_3(x,y) = \begin{cases} ((x-0{,}5)^2 - a^2)^2((y-0{,}5)^2 - b^2)^2, & |x-0{,}5| \leqslant a, \quad |y-0{,}5| \leqslant b, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$f_4(x,y) = \begin{cases} 1, & (x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2 \leqslant r^2, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$f_5(x,y) = \begin{cases} r^2 - ((x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2), & (x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2 \leqslant r^2, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$f_6(x,y) = \begin{cases} [r^2 - ((x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2)]^2, & (x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2 \leqslant r^2, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$f_7(x,y) = \begin{cases} 1, & w(x,y) > 0, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

де $w = u + v + \sqrt{u^2 + v^2}$, $u = -(x - 0{,}5 - c)(x - 0{,}5 + c)$, $v = -(x - 0{,}5 - d)(x - 0{,}5 + d)$, $a = b = c = d = r = 0{,}25$.

Функції f_1, f_4, f_7 — розривні, f_2, $f_5 \in C[0,1]^2$, f_3, $f_6 \in C^1[0,1]^2$.

Аналізуючи результати (табл. 1) проведених експериментів для фінітних функцій $f_\nu(x,y)$, $\nu = \overline{1,7}$, класу $C^r[0,1]^2$, $r = 0,1$, можна зробити такий висновок: похибка наближення коефіцієнтів Фур'є за модулем має порядок $O(1/n)$, де n — кількість інтервалів розбиття відрізка $[0,1]$ при побудові вейвлетів Хаара.

Таблиця 1

Функція	$\varepsilon = \max\limits_{1 \leqslant k,\, l \leqslant N} \lvert C_{k,l} - \widetilde{C_{k,l}} \rvert$		
	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$
$f_1(x,y)$	$1{,}253 \cdot 10^{-3}$	$1{,}306 \cdot 10^{-3}$	$1{,}306 \cdot 10^{-3}$
$f_2(x,y)$	$1{,}743 \cdot 10^{-4}$	$1{,}766 \cdot 10^{-4}$	$1{,}866 \cdot 10^{-4}$
$f_3(x,y)$	$6{,}598 \cdot 10^{-5}$	$6{,}598 \cdot 10^{-5}$	$6{,}61 \cdot 10^{-5}$
$f_4(x,y)$	$4{,}736 \cdot 10^{-4}$	$4{,}968 \cdot 10^{-4}$	$4{,}968 \cdot 10^{-4}$
$f_5(x,y)$	$8{,}739 \cdot 10^{-5}$	$8{,}739 \cdot 10^{-5}$	$8{,}739 \cdot 10^{-5}$
$f_6(x,y)$	$8{,}723 \cdot 10^{-5}$	$8{,}723 \cdot 10^{-5}$	$8{,}723 \cdot 10^{-5}$
$f_7(x,y)$	$9{,}166 \cdot 10^{-4}$	$9{,}23 \cdot 10^{-4}$	$9{,}23 \cdot 10^{-4}$

1. *Литвин О. М.* Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії // Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісн. Харків. держ. політех. ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 125. – Харків: ХДПУ, 2000. – С. 27–35.
2. *Литвин О. М., Міхалкін В. В.* Про оцінку похибки розв'язання плоскої задачі комп'ютерної томографії з використанням кусково-сталих сплайнів // Доп. НАН України. – 2002. – № 5. – С. 31–35.
3. *Литвин О. М., Міхалкін В. В.* Обчислення коефіцієнтів Фур'є за даними Радона на основі формули Файлона // Матеріали VII Всеукр. міжнар. конф. УкрОБРАЗ'2004. – Київ, 2004. – С. 281–284.
4. *Gottlieb D., Gustafsson B.* On the direct Fourier method for computer tomography / Uppsala University, Department of Scientific Computing, March 28, 1998. – P. 1–31. http // www.tdb.uu.se/archive/reports/index.html, No 207.
5. *Нуссбаумэр Г.* Быстрые преобразования Фурье и алгоритмы вычисления сверток. – Москва: Радио и связь, 1985. – 248 с.
6. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии / Под ред. В. П. Паламодова. – Москва: Мир, 1990. – 279 с.
7. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи: навч. посібник. – Київ: Наук. думка, 2005. – 332 с.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
Надійшло до редакції 26.12.2007

O. N. Lytvyn, S. I. Kulyk

Mathematical modeling in computer tomography with the use of wavelets

A new method of calculation of the Fourier coefficients for the mathematical modeling in computer tomography by trigonometric Fourier and Fejer sums is presented. In this method, projections (the integrals of a function $f(x, y)$ along the given set of directions) are changed by wavelet sums. Examples are given.