УДК 517.63

© 2009

Член-кореспондент НАН України **В. Л. Макаров, І. П. Гаврилюк, І. І. Лазурчак, Д. О. Ситник**

# Функціонально-дискретний метод для нелінійних операторних та диференціальних рівнянь

*Робота складається з двох частин, які є значною мірою незалежними, але водночас поєднані важливою спільною ідеєю: вони обидві суттєво ґрунтуються на поліномах Адомяна. Перша частина присвячена чисельному методу для нелінійних операторних рівнянь, який збігається експоненціально і забезпечує двосторонні наближення; друга частина — нелінійному диференціальному рівнянню другого порядку. Ми пропонуємо новий суперекспоненціально збіжний метод з вбудованим механізмом контролю збіжності, яка таким чином може бути завжди забезпечена.*

Останнім часом велика кількість робіт присвячується методу декомпозиції Адомяна (МДА) для знаходження розв'язків як лінійних, так і нелінійних звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних. Викладемо сутність МДА.

Якщо крайова (або початково-крайова) задача зведена до операторного рівняння вигляду

$$u = -A(u) + F, \tag{1}$$

то МДА полягає у знаходженні наближення до розв'язку рівняння (1) за допомогою рекурентного процесу. Розв'язок шукається у вигляді ряду

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)}, \tag{2}$$

а його члени визначаються формулами

$$u^{(j+1)} = -A_j(u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(j)}), \quad j = 0, 1, \ldots, \quad A_0(u^{(0)}) = A(u^{(0)}), \quad u^{(0)} = F, \tag{3}$$

де $A_j(u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(j)})$ — поліноми Адомяна, що визначаються таким чином:

$$A_j(u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(j)}) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_j=j} A^{(\alpha_1)}(u^{(0)}) \frac{(u^{(1)})^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)!} \cdots \times$$
$$\times \frac{(u^{(j-1)})^{\alpha_{j-1}-\alpha_j}}{(\alpha_{j-1}-\alpha_j)!} \frac{(u^{(j)})^{\alpha_j}}{(\alpha_j)!}, \qquad \alpha_i \geqslant 0, \tag{4}$$

послідовність $\alpha_i$ — незростаюча, $A^{(i)}(u)$ — похідна $i$-го порядку (у сенсі Фреше) від оператора $A$. За наближення $\overset{m}{u}$ до розв'язку задачі (1) приймається вираз $\overset{m}{u} = \sum\limits_{j=0}^{m} u^{(j)}$.

МДА можна інтерпретувати як функціонально-дискретний (FD) метод, який вперше був запропонований до розв'язування задачі Штурма–Ліувілля в [1]. Покажемо, у чому полягає суть даного методу.

Задача (1) занурюється у більш загальну задачу

$$u(t) = -tA(u(t)) + F, \qquad t \in [0,1], \tag{5}$$

розв'язок якої має очевидну властивість $u(1) = u$. Шукаємо розв'язок задачі (5) у вигляді ряду

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j u^{(j)}, \tag{6}$$

члени якого знаходяться з рекурентної послідовності задач (3), що одержується з рівняння

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^j u^{(j)} = -tA\left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j u^{(j)}\right) + F$$

шляхом застосування до обох його частин оператора

$$\frac{1}{(j+1)!}\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}$$

і підстановки $t = 0$. Далі знаходяться достатні умови на нелінійний оператор $A$, які забезпечують рівномірну збіжність ряду (6) $\forall\, t \in [0,1]$. Щодо збіжності МДА у роботі [2] наведена теорема, доведення якої є неоптимальним, бо використовує техніку оцінювання кожного з членів ряду (6), а результуюча оцінка виявляється досить грубою. Значне покращення в цьому напрямі можна отримати, використовуючи ідеологію методу твірних функцій.

В [3] запропоновано модифікацію МДА. Члени ряду (2) шукаються за рекурентними формулами

$$u^{(j+1)} = -\overline{A_j}(u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(j)}), \qquad j = 0, 1, \ldots, \qquad u^{(0)} = F, \tag{7}$$

де $\overline{A_j}(u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(j)})$ — модифіковані поліноми Адомяна, що визначаються за формулою

$$\overline{A_j}(u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(j)}) = A(u^{(0)} + \cdots + u^{(j)}) - A(u^{(0)} + \cdots + u^{(j-1)}). \tag{8}$$

У зазначеній вище роботі для задачі Коші

$$\frac{d^k y(t)}{dt^k} + \beta(t) f(y(t)) = \kappa(t), \qquad t \in (0,T), \qquad \frac{d^p y(t)}{dt^p} = c_p - \mathrm{const}, \qquad p = \overline{0, k-1},$$

було показано, що при умові $\alpha = LMT^k/k! < 1$ модифікований МДА збігається зі швидкістю геометричної прогресії із знаменником $\alpha$ і має місце оцінка похибки

$$\left| y(t) - \sum_{j=0}^{m} y_j(t) \right| \leqslant \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \|y_1\|_\infty.$$

Тут $L$ — стала Ліпшіца функції $f(y)$, $M = \max\limits_{t \in [0,T]} |\beta(t)|$. Чисельні експерименти на конкретному прикладі показали, що модифікований МДА збігається набагато швидше, ніж МДА. Але автор роботи [3] не помітив, що модифікований МДА є фактично загальновідомим методом послідовних наближень. Дійсно, якщо позначити через $u^{m+1} = u^{(0)} + \dots + u^{(m+1)}$, то з (7), (8) одержуємо, що

$$u^{m+1} = -A(u^m) + F, \qquad m = 0, 1, \dots, \qquad u^0 = F. \tag{9}$$

Звідси випливають висновки роботи [3] про переваги модифікованого МДА у порівнянні з традиційним, що цілком узгоджується з висновками статті [4] про переваги методу послідовних наближень.

Завданням даної роботи є дві мети. Перша з них — знаходження достатніх умов, які б забезпечували двосторонність методу (9) на конусі $K$, що належить банаховому простору $X$, друга — побудова алгоритму з використанням загальної схеми FD-методу, який забезпечував би збіжність, у той час коли звичайний метод послідовних наближень є розбіжним.

**1. Двосторонній метод послідовних наближень.** Позначимо через $\overline{S}_r(a)$ замкнену кулю в Банаховому просторі $X$ $\overline{S}_r(d) = \{x \in X \colon \|x - a\| \leqslant r\}$. Має місце

**Теорема 1.** *Нехай оператор $A$ задовольняє такі умови:*

*1) для всіх $u$, $v \in \overline{S}_r(a)$: $\|A(u) - A(v)\| \leqslant q\|u - v\|$, $q \in (0, 1)$;*

*2) для всіх $F \in \overline{S}_r(a)$: $\|A(F)\| \leqslant (1 - q)r$.*

*Тоді рівняння*

$$u = -A(u) + F, \qquad A(0) = 0 \tag{10}$$

*має єдиний розв'язок $u_\star \in \overline{S}_r(a)$, який може бути одержаний методом послідовних наближень*

$$u_{n+1} = -A(u_n) + F, \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{11}$$

*з оцінкою похибки*

$$\|u_\star - u_n\| \leqslant \frac{q^n r}{1 - q}.$$

Далі нас цікавлять умови, які треба накласти на оператор $A$, щоб ітераційний процес (11) забезпечував двосторонність наближень до $u_\star$.

Нехай $K \subset X$ є конусом з введеним напівпорядком $\preceq$. Це означає, що якщо $u - v \in K$, то будемо писати $v \preceq u$. Далі вважатимемо, що:

3) $F \in K$;

4) оператор $A$ є додатним, тобто $A(K) \subset K$;

5) існує похідна Фреше $A'(v)$, яка має властивість $\|A'(v)\| \leqslant q$, $0 \preceq A'(v)u$ $\forall u, v \in \overline{S}_r(F) \bigcap K$;

6) $0 \preceq u_1 = -A(u_0) + F = -A(F) + F$.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови 2–6. Тоді ітераційний метод* (11) *збігається до єдиного розв'язку $u_\star$ рівняння* (10) *і має властивість двостороннього наближення*

$$u_1 \preceq u_3 \preceq \dots \preceq u_{2k+1} \preceq \dots \preceq u_\star \preceq \dots \preceq u_2 \preceq u_0.$$

**2. Загальна схема FD-методу з використанням поліномів Адомяна.** У випадку, коли метод послідовних наближень (9) є розбіжним, пропонується застосовувати загальну схему FD-методу з використанням поліномів Адомяна. Цей підхід викладемо на прикладі задачі Діріхле для квазілінійного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{aligned} &u''(x)-N(u(x))u(x) = -f(x), \qquad x \in (0,1),\\ &u(0) = u(1) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Відносно нелінійної функції $N(u)\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ будемо припускати, що

$$N(u) \geqslant 0, \qquad [uN(u)]' \geqslant 0, \qquad N''(u) \geqslant 0, \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}^1.$$

Розіб'ємо проміжок $[0,1]$ сіткою $\overline{\widehat{\omega}} = \{x_i \in [0,1], i = \overline{0,K}\colon 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{K-1} < < x_K = 1\}$ і зануримо задачу (12) за певною аналогією із задачею (5) у більш загальну задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \{N(u(x_{i-1},t)) + t[N(u(x,t)) - N(u(x_{i-1},t))]\}u(x,t) = -f(x),\ x \in (0,1),\\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{13}$$

Ясно, що $u(x,1) = u(x)$, а при $t = 0$ одержуємо базову задачу

$$\frac{d^2 u^{(0)}(x)}{dx^2} - N(u^{(0)}(x_{i-1}))u^{(0)}(x) = -f(x), \qquad x \in (x_{i-1}, x_i), \qquad i = \overline{1,K}, \tag{14}$$

$$u^{(0)}(0) = u^{(0)}(1) = 0, \quad [u^{(0)}(x)]_{x=x_i} = 0, \quad \left[\frac{du^{(0)}(x)}{dx}\right]_{x=x_i} = 0, \quad i = \overline{1,K-1}, \tag{15}$$

де $[v(x)]_{x=\xi} = v(\xi+0) - v(\xi-0)$ означає стрибок функції $v(x)$ у точці $x = \xi$.

Остання задача, як і задача (13), належить до крайових задач з кусково-сталим аргументом, якій останнім часом приділяється значна увага (див., напр., [5] і цитовану там літературу).

Шукаємо розв'язок задачі (13) у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j u^{(j)}(x), \tag{16}$$

коефіцієнти якого знаходяться як розв'язки рекурентної системи задач з кусково-сталим аргументом

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 u^{(j+1)}(x)}{dx^2} - N(u^{(0)}(x_{i-1}))u^{(j+1)}(x) =\\ &\qquad = N'(u^{(0)}(x_{i-1}))u^{(j+1)}(x_{i-1})u^{(0)}(x) + F^{(j+1)}(x), \qquad x \in (x_{i-1}, x_i), \end{aligned} \tag{17}$$

де

$$\begin{aligned} F^{(j+1)}(x) = {} & \sum_{p=1}^{j} A_{j+1-p}(u^{(0)}(x_{i-1}), \dots, u^{(j+1-p)}(x_{i-1}))u^{(p)}(x) + \\ & + \sum_{p=0}^{j} [A_{j-p}(u^{(0)}(x), \dots, u^{(j-p)}(x)) - A_{j-p}(u^{(0)}(x_{i-1}), \dots, u^{(j-p)}(x_{i-1}))]u^{(p)}(x) + \\ & + A_{j+1}(u^{(0)}(x_{i-1}), \dots, u^{(j)}(x_{i-1}), 0)u^{(0)}(x), \end{aligned} \tag{18}$$

$$u^{(j+1)}(0)=u^{(j+1)}(1)=0, \quad \left[u^{(j+1)}(x)\right]_{x=x_i}=0, \quad \left[\frac{du^{(j+1)}(x)}{dx}\right]_{x=x_i}=0, \quad i=\overline{1,K-1}. \qquad (19)$$

Тут $A_j(v_1,\ldots,v_j)$ — поліноми Адомяна для нелінійної функції $N(v)$, що визначаються формулою (4).

Розглянемо базову задачу (14)–(15), розв'язність якої пов'язана з розв'язністю нелінійної системи

$$u^{(0)}(x_i)=\int\limits_0^1 G(x_i,\xi,\overrightarrow{N(u^{(0)})})f(\xi)d\xi, \qquad i=\overline{1,K-1}, \qquad (20)$$

де $\overrightarrow{N(u^{(0)})}=(N(u^{(0)}(x_1)),\ldots,N(u^{(0)}(x_{K-1})))$, а $G(x_i,\xi,\overrightarrow{N(u^{(0)})})$ — функція Гріна, що відповідає задачі (14), (15) при відомих значеннях $u^{(0)}(x_i)$, $i=\overline{1,K-1}$.

Нехай $f(x)\in C[0,1]$, тоді неперервний оператор

$$B(\overrightarrow{u^{(0)}})=\left(\int\limits_0^1 G(x_i,\xi,\overrightarrow{N(u^{(0)})})f(\xi)d\xi\right)_{i=1}^{K-1}$$

переводить замкнену кулю $\overline{S}=\left\{\overrightarrow{u^{(0)}}\in\mathbb{R}^{K-1}\colon \max\limits_{1\leqslant i\leqslant K-1}|u_i^{(0)}|=\|\overrightarrow{u^{(0)}}\|_1\leqslant r\right\}$ у себе і, отже, за теоремою Л. Брауера (див. [6]) у $\overline{S}$ знайдеться нерухома точка оператора $B$, тобто система рівнянь (20) буде мати розв'язок.

Задачу (17)–(19) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u^{(j+1)}(x)}{dx^2}-[N(u^{(0)}(x_{i-1}))+N'(u^{(0)}(x_{i-1}))u^{(0)}(x_{i-1})]u^{(j+1)}(x)=\\&\qquad=N'(u^{(0)}(x_{i-1}))[u^{(j+1)}(x_{i-1})u^{(0)}(x)|-|u^{(j+1)}(x)u^{(0)}(x_{i-1})]+\\&\qquad\quad+F^{(j+1)}(x), \qquad x\in(x_{i-1},x_i), \qquad i=\overline{1,K},\end{aligned} \qquad (21)$$

$$u^{(j+1)}(0)=u^{(j+1)}\ (1)=0, \qquad j=0,1,\ldots. \qquad (22)$$

Введемо позначення

$$q(x)=N(u^{(0)}(x_{i-1}))+N'(u^{(0)}(x_{i-1}))u^{(0)}(x_{i-1}), \qquad x\in[x_{i-1},x_i), \qquad i=\overline{1,K}. \qquad (23)$$

За допомогою функції Гріна $G(x,\xi,q(\cdot))$, що відповідає диференціальному оператору лівої частини (21) з умовами (22), задачу (21), (22) можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned}u^{(j+1)}(x)&=\sum_{p=1}^{K}\int\limits_{x_{p-1}}^{x_p}G(x_i,\xi,q(\cdot))\int\limits_{x_{p-1}}^{\xi}\frac{du^{(j+1)}(\eta)}{d\eta}d\eta u^{(0)}(\xi)d\xi N'(u^{(0)}(x_{k-1}))-\\&\quad-\sum_{p=1}^{K}\int\limits_{x_{p-1}}^{x_p}G(x_i,\xi,q(\cdot))\int\limits_{x_{p-1}}^{\xi}\frac{du^{(0)}(\eta)}{d\eta}d\eta u^{(j+1)}(\xi)d\xi N'(u^{(j+1)}(x_{p-1}))-\\&\quad-\int\limits_0^1 G(x_i,\xi,q(\cdot))F^{(j+1)}(\xi)d\xi, \qquad i=\overline{1,K}.\end{aligned} \qquad (24)$$

Для того щоб одержати оцінки для $u^{(j+1)}(x)$, нам потрібно дослідити функцію Гріна $G(x, \xi, q(\cdot))$, для якої має місце явне зображення

$$G(x_i, \xi, q(\cdot)) = \frac{1}{v_1(1)} \begin{cases} v_1(x)v_2(\xi), & x \leqslant \xi, \\ v_1(\xi)v_2(x), & \xi \leqslant x, \end{cases} \tag{25}$$

де $v_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, є так званими шаблонними функціями і вони визначаються, як розв'язки задач Коші

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}v_\alpha(x) - N(u^{(0)}(x_{i-1}))v_\alpha(x) = 0, \qquad x_{i-1} < x < x_i, \\ &\alpha = 1, 2, \qquad i = \overline{1, K}, \\ &v_1(0) = 0, \qquad v_1'(0) = 1, \qquad v_2(1) = 0, \qquad v_2'(1) = -1. \end{aligned} \tag{26}$$

Ці функції мають такі властивості:

1) $v_1(x)$ є неспадною, невід'ємною функцією на $[0, 1]$;
2) $v_2(x)$ є незростаючою, невід'ємною функцією на $[0, 1]$;
3) $v_1(1) = v_2(0)$,
4) $v_1'(x)v_2(x) - v_1(x)v_2'(x) \equiv v_1(1) = v_2(0)$.

Використовуючи принцип максимуму та властивості 1–4, приходимо до оцінок

$$0 \leqslant G(x, \xi, q(\cdot)) \leqslant G(x, \xi, 0), \tag{27}$$

$$\left|\frac{\partial G(x, \xi, q(\cdot))}{\partial x}\right| \leqslant 1. \tag{28}$$

За допомогою (27), (28) та з використанням припущень відносно функції $N(u)$ з (24) одержимо

$$\begin{aligned} &\|u^{(j+1)}\|_{1,\infty,[0,1]} \leqslant |h|\|u^{(0)}\|_{1,\infty,[0,1]}N'(\|u^{(0)}\|_{1,\infty,[0,1]})\|u^{(j+1)}\|_{1,\infty,[0,1]} + \\ &\qquad + \|F^{(j+1)}\|_{1,\infty,[0,1]}, \qquad |h| = \underset{1 \leqslant i \leqslant K}{h_i} \end{aligned} \tag{29}$$

або для достатньо малого $|h|$

$$\|u^{(j+1)}\|_{1,\infty,[0,1]} \leqslant c_1\|F^{(j+1)}\|_{1,\infty,[0,1]} \tag{30}$$

з

$$c_1 = [1 - |h|\|u^{(0)}\|_{1,\infty,[0,1]}N'(\|u^{(0)}\|_{1,\infty,[0,1]})]^{-1}. \tag{31}$$

Тут були використані такі позначення для норм:

$$\|v\|_{0,\infty,[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |v(x)|, \qquad \|v\|_{1,\infty,[0,1]} = \max\Big\{\max_{x \in [0,1]} |v(x)|, \max_{x \in [0,1]} |v'(x)|\Big\}.$$

Далі нам знадобиться ряд допоміжних тверджень

**Лема 1.** *Нехай функція $N(u)$ є аналітичною та*

$$N(u) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u^{2i}, \qquad a_i \geqslant 0, \qquad u^{(p)}(x) \in C^1[0, 1], \qquad p = 0, 1, \ldots,$$

*тоді*

$$\|A_k(N(u);u^{(0)}(x),\dots,u^{(k)}(x))-A_k(N(u);u^{(0)}(x_{i-1}),\dots,u^{(k)}(x_{i-1}))\|_\infty\leqslant$$
$$\leqslant 2h\sum_{i=1}^{\infty}ia_iA_k(N(u);\|u^{(0)}\|_{1,\infty},\|u^{(1)}\|_{1,\infty},\dots,\|u^{(k)}\|_{1,\infty})=$$
$$=hN'(1)A_k(N(u);\|u^{(0)}\|_{1,\infty,[0,1]},\|u^{(1)}\|_{1,\infty,[0,1]},\dots,\|u^{(k)}\|_{1,\infty,[0,1]}). \qquad (32)$$

**Лема 2.** *Нехай функція* $N(u)$ *є аналітичною та* $N(u)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_ju^{2j}$, *тоді має місце формула*

$$A_{j+1}(N(u);V_0,\dots,V_j,0)=\frac{1}{(j+1)!}\left\{\frac{d^{j+1}}{dz^{j+1}}[N(f(z))-(f(z)-V_0)N'(V_0)]\right\}_{z=0}, \qquad (33)$$
$$j=0,1,\dots,$$

*де* $f(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}z^jV_j$.

Повертаючись до (30) і беручи до уваги (32), (33), одержуємо

$$\|u^{(j+1)}\|_{1,\infty}\leqslant c_1\Bigg\{\sum_{p=1}^{j}A_{j+1|-|p}(\|u^{(0)}\|_{1,\infty},\|u^{(1)}\|_{1,\infty},\dots,\|u^{(j+1|-|p)}\|_{1,\infty})\|u^{(p)}\|_{1,\infty}+$$
$$+hN'(1)\sum_{p=0}^{j}A_{j-p}(\|u^{(0)}\|_{1,\infty},\dots,\|u^{(j-p)}\|_{1,\infty})\|u^{(p)}\|_{1,\infty}+$$
$$+\frac{1}{(j+1)!}\left[\frac{d^{j+1}}{dz^{j+1}}\left(N\left(\sum_{s=0}^{\infty}z^s\|u^{(s)}\|_{1,\infty}\right)-\sum_{s=1}^{\infty}z^s\|u^{(s)}\|_{1,\infty}N'(\|u^{(0)}\|_{1,\infty})\right)\right]_{z=0}\Bigg\}. \qquad (34)$$

Підставляючи в (34)

$$[N'(1)h]^{-j}\|u^{(j)}\|_{1,\infty}=v_j, \qquad (35)$$

заміняючи $v_j$ на $V_j$ та знак нерівності на знак рівності, ми одержуємо таку систему рівнянь:

$$V_{j+1}=c_1\Bigg\{\sum_{p=1}^{j}A_{j+1-p}(V_0,\dots,V_{j+1|-|p})V_p+\sum_{p=0}^{j}A_{j-p}(V_0,\dots,V_{j-p})V_p+$$
$$+\frac{1}{(j+1)!}\frac{d^{j+1}}{dz^{j+1}}\left(N\left(\sum_{s=0}^{\infty}z^sV_s\right)\right)_{z=0}-V_{j+1}N'(V_0)\Bigg\}, \qquad j=0,1,\dots, \qquad (36)$$
$$V_0=v_0=\|u^{(0)}\|_{1,\infty},$$

або

$$V_{j+1}=\frac{c_1}{c_1+N'(V_0)}\left\{\sum_{p=1}^{j}A_{j+1-p}(V_0,\ldots,V_{j+1-p})V_p+\sum_{p=0}^{j}A_{j-p}(V_0,\ldots,V_{j-p})V_p+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(j+1)!}\frac{d^{j+1}}{dz^{j+1}}\left(N\left(\sum_{s=0}^{\infty}z^sV_s\right)\right)_{z=0}\right\}. \qquad (37)$$

Розв'язок цієї системи мажорує розв'язок (34), тобто $v_j\leqslant V_j$, $j=0,1,\ldots$. Використовуючи метод твірних функцій, з (37) одержуємо

$$f(z)-V_0=\frac{c_1}{c_1+N'(V_0)}\{[f(z)-V_0][N(f(z))-N(V_0)]+$$
$$+zf^2(z)N'(f(z))+N(f(z))-N(V_0)\}. \qquad (38)$$

З цього рівняння одержуємо $z$ як функцію від $f$

$$z=\frac{1}{N(f)}\left\{\left(\frac{1}{\tilde{C}}-N(f)+N(V_0)\right)(f-V_0)-N(f)+N(V_0)\right\},$$
$$V_0\leqslant f,\qquad \tilde{C}=\frac{c_1}{c_1+N'(V_0)}, \qquad (39)$$

що дозволяє знайти таке $f_m$, для якого $z$ досягає свого максимуму $z_m=R$. Існування $f_m$ гарантується умовами

$$|h|V_0[N'(V_0)]^2<1,\qquad \lim_{f\to\infty}N(f)=\infty. \qquad (40)$$

Це максимальне значення $z_{\max}$ збігається з радіусом збіжності ряду (38), тобто ми маємо

$$R^jV_j=C\frac{1}{(j+1)^{1+\varepsilon}}, \qquad (41)$$

для довільного додатного достатньо малого $\varepsilon$. Повертаючись до старих позначень, будемо мати

$$\|u^{(j)}\|_{1,\infty}\leqslant\frac{C}{(j+1)^{1+\varepsilon}}\left(\frac{h}{R}\right)^j,\qquad j=0,1,\ldots, \qquad (42)$$

що приводить до достатніх умов збіжності ряду $f(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}z^jV_j$

$$\frac{h}{R}\leqslant 1. \qquad (43)$$

Таким чином, доведене таке твердження

**Теорема 3.** *Нехай виконані умови леми 1, тоді FD-метод для задачі* (38) *є суперзбіжним (збіжним) при умові, що*

$$h<R\qquad (h=R), \qquad (44)$$

*з оцінкою похибки*

$$\|u-\overset{m}{u}\|_{1,\infty}\leqslant\frac{C}{(1+m)^{1+\varepsilon}}\frac{(h/R)^{m+1}}{1-h/R},\qquad C=\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{1+\varepsilon}}. \qquad (45)$$

1. *Makarov V. L.* A functional-difference method of arbitrary order of accuracy for solving the Sturm-Liouville problem with piecewise-smooth coefficients // Soviet. Math. Dokl. – 1992. – **44**, No 2. – P. 391–396.
2. *Abbaoui K., Pujol M. J., Cherruault Y. et al.* A new formulation of Adomian method: convergence result // Kybernetes. – 2001. – **30**, No 9–10. – P. 1183–1191.
3. *El-Kalla I. L.* Error analysis of Adomian series solution to a class of nonlinear differential equations // Appl. Math. E-Notes. – 2007. – **7**. – P. 214–221.
4. *Рождественский Б. Л.* Метод Пикара как метод решения задач математической физики // Численные методы механики сплошной среды. – 1974. – **5**, № 2. – С. 96–103.
5. *Akhmet M. U.* Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Nonlinear Anal. – 2007. – **66**, No 2. – P. 367–383.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.

*Інститут математики НАН України, Київ*
*Надійшло до редакції 20.06.2008*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. L. Makarov, I. P. Gavryljuk, I. I. Lazurchak, D. O. Sytnyk**

## The functional-discrete-method for nonlinear operator and differential equations

*The paper is consists of two parts which are essentially independent but, despite this, are connected by an important idea: they both using Adomian's polynomials. The first part is devoted to a new numerical method for nonlinear operator equations which converges exponentially and provides the two-sided approximations. The second part deals with a nonlinear differential equation. We propose a new super-exponentially convergent numerical method with an embedded convergence control mechanism so that the convergence can be ensured in either case.*