УДК 517.547.2

А. Г. Бакан

Разложение обратной величины целой функции на простые дроби

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины П. М. Тамразовым)

Наведені нові достатні умови розкладності на прості дроби оберненої величини цілої функції однієї комплексної змінної.

В данной работе результаты о поведении целых и мероморфных функций, полученные А. Баерштейном [1], И. В. Островским [2] и В. Хейманом [3], применяются для ослабления условий разложимости на простые дроби обратной величины целой функции, которые были ранее найдены М. Г. Крейном [4], Б. Я. Левиным [5], Л. де Бранжем [6], П. Кусисом [7] и Г. Педерсеном [8].

Определения. Для целой функции f и $0 < \rho < \infty$ определим $M_f(r) := \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $r \geqslant 0$, $\rho_f := \varlimsup\limits_{r\to\infty} [\log\log M_f(r)]/\log r$, $\sigma_f(\rho) := \varlimsup\limits_{r\to\infty} r^{-\rho}\log M_f(r)$, и пусть Λ_f обозначает множество всех нулей f. Говорят, что f имеет экспоненциальный тип, если $\sigma_f(1) < \infty$, и минимальный экспоненциальный тип, если $\sigma_f(1) = 0$. Пусть $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ — семейство всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}^+$, m — мера Лебега на $\mathbb{R}$ и $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^+) := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \colon \varlimsup\limits_{r\to+\infty} m([0,r]\bigcap A)/r = 0\}$.

Для произвольного $q \in \mathbb{Z}$ введем класс $\mathcal{E}^{\mathsf{S}_q}$ таких трансцендентных целых функций f, которые имеют только простые нули и

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_f} \frac{1}{(1+|\lambda|)^{q+1}\,|f'(\lambda)|} < \infty.$$

Будем говорить, что целая функция f принадлежит классу $\mathcal{K}^q$, если $f \in \mathcal{E}^{\mathsf{S}_q}$ и в случае $q \leqslant 0$ имеет место равенство

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{\lambda\in\Lambda_f} \frac{1}{f'(\lambda)(z-\lambda)}, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\Lambda_f,$$

а если $q \geqslant 1$, то существует такой полином P степени q, который имеет все простые корни на множестве $\mathbb{C}\setminus\Lambda_f$ и справедливо разложение вида

$$\frac{1}{f(z)\cdot P(z)} = \sum_{\lambda\in\Lambda_P} \frac{1}{f(\lambda)P'(\lambda)(z-\lambda)} + \sum_{\lambda\in\Lambda_f} \frac{1}{f'(\lambda)P(\lambda)(z-\lambda)}$$

при любом $z \in \mathbb{C}\setminus\Lambda_f$.

Напомним, что классом Картрайт [9, с. 115] называется класс целых функций экспоненциального типа, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{-1}|\log|f(x)||\,dx < \infty$$

(см. [5, гл. 5, теорема 7]). В 1946 г. Н. И. Ахиезер [10] ввел, а в 1956 г. Б. Я. Левин (см. [9, гл. 5]) обозначил через A класс тех целых функций f, нули которых удовлетворяют

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_f \setminus \{0\}} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda} \right| < \infty.$$

Основные результаты. Используя методы и результаты работ [1, 2], получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $q \in \mathbb{Z}$ *и* $f \in \mathcal{E}^{\mathsf{S}_q}$. *Функция* f *принадлежит классу* $\mathsf{A} \bigcap \mathcal{K}^q$ *тогда и только тогда, когда* f *принадлежит классу Картрайт и существует такое множество* $E \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^+)$ *и такое неотрицательное целое число* N, *что*

$$|y|^N |f(iy)| \to +\infty \qquad \text{при} \qquad |y| \to +\infty, \qquad |y| \in \mathbb{R}^+ \setminus E.$$

Результаты М. Г. Крейна [4] (см. также [9, теорема 3, с. 116]), Б. Я. Левина [9, гл. 5, § 6] и Луи де Бранжа [6, с. 826, лемма 2 с $G(z) \equiv 1$] являются частными случаями теоремы 1.

Доказательство следующей теоремы основывается на формуле выпуклости Карлемана–Цуи–Хейнса (см. [3, теорема 8.1, с. 536]). Схема доказательства этой теоремы была предложена автору М. Л. Содиным.

Теорема 2. *Пусть* $q \in \mathbb{Z}$ *и* $f \in \mathcal{E}^{\mathsf{S}_q}$. *Если* f *является целой функцией минимального экспоненциального типа, то* f *принадлежит классу* $\mathcal{K}^q$.

При $q = 0$ и $\Lambda_f \subset \mathbb{R}$ теорема 2 совпадает с теоремой Г. Педерсена [8, теорема 6.6, с. 51].

Использование теоремы С. Н. Бернштейна об уточненном порядке (см. [5, гл. 1, теорема 31]) вместе с результатами работ [1–3] позволяет доказать следующее утверждение. Обозначим через $[x]$ целую часть действительного числа x.

Теорема 3. *Пусть* $q \in \mathbb{Z}$ *и целая функция* $f \in \mathcal{E}^{\mathsf{S}_q}$ *имеет конечный порядок* ρ_f.

1. Если существует $n \geqslant [2\rho_f] + 1$ *точек* $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_n < 2\pi$ *(*$\rho_f \geqslant 1$ *влечет* $n \geqslant 3$*), удовлетворяющих*

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k < \frac{\pi}{\rho_f}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \qquad 2\pi + \varphi_1 - \varphi_n < \frac{\pi}{\rho_f},$$

и существует такое неотрицательное целое число N, *что*

$$r^N |f(re^{i\varphi_k})| \to +\infty \qquad \text{при} \qquad r \to +\infty, \qquad r \in \mathbb{R}^+ \setminus E_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

с некоторыми $E_k \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^+)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *то* f *принадлежит классу* $\mathcal{K}^q$.

2. Если f *принадлежит классу* $\mathcal{K}^q$, *то для каждого* $\theta \in (-\pi, \pi]$ *существует такое множество* $E_\theta \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^+)$, *что*

$$r^{1+q+[\rho_f]} f(re^{i\theta}) \to \infty \qquad \text{при} \qquad r \to +\infty, \qquad r \in \mathbb{R}^+ \setminus E_\theta;$$

причем $E_\theta = \varnothing$ *для почти всех* $\theta \in (-\pi, \pi]$ *относительно меры Лебега* m *и*

$$\bigcup_{\theta \in (-\pi, \pi]} E_\theta \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^+).$$

Для $\rho_f = 1$ первый пункт теоремы 3 был доказан П. Кусисом [7, с. 203] при $n \geqslant 4$. Иной вид необходимого и достаточного условия принадлежности f классу $\bigcup\limits_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{K}^q$ при $\rho_f \leqslant 1$ был недавно найден В. Б. Шерстюковым.

1. *Baernstein A.* A generalization of the $\cos \pi\rho$ theorem // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – **193**. – P. 181–197.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – Москва: Наука, 1970. – 591 с.
3. *Hayman W. K.* Subharmonic functions. Vol. 2. – New York: Acad. Press, 1989. – 616 p.
4. *Крейн М. Г.* К теории целых функций экспоненциального типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1947. – **11**. – С. 309–326.
5. *Levin B. Ja.* Distribution of zeros of entire functions // Transl. of Math. Monographs. – Rev. ed. – Providence, RI: AMS, 1980. – 523 p.
6. *Branges L.* The Bernstein problem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – **10**. – P. 825–832.
7. *Koosis P.* The logarithmic integral. Vol. 1. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. – 606 p.
8. *Berg Ch., Pedersen H.* Nevanlinna matrices of entire functions // Math. Nachr. – 1995. – **171**. – P. 29–52.
9. *Levin B. Ja.* Lectures on entire functions (in collaboration with Lyubarskii Yu., Sodin M., Tkachenko V.) // Transl. of Math. Monographs. Vol. 150. – Providence, RI: AMS, 1996. – 248 p.
10. *Ахиезер Н. И.* О некоторых свойствах трансцендентных целых функций экспоненциального типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 411–428.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 23.06.2008

A. G. Bakan

The decomposition of the inverse quantity of an entire function in primary fractions

We give new sufficient conditions for the inverse quantity of an entire function of one complex-valued variable to be presented in the form of a series of primary fractions.