УДК 517.9

П. О. Касьянов

Про розв'язність одного класу параметризованих мультиваріаційних нерівностей

(Представлено академіком НАН України М. З. Згуровським)

Розглянуто клас параметризованих операторних та варіаційних нерівностей з багатозначними відображеннями типу $\overline{S_k}$. Отримано достатні умови розв'язності таких нерівностей та досліджено залежність множин їх розв'язків від функціональних параметрів. Наведено приклади, які ілюструють одержані результати.

Операторні включення та варіаційні нерівності є об'єктом інтенсивних досліджень упродовж останніх десятиліть (див. [1–4] та багато інших). Інтерес до таких об'єктів обумовлений у першу чергу їх широким практичним застосуванням. Зазвичай їх пов'язують із задачами математичної фізики, з диференціальними рівняннями з частинними похідними, диференціальні оператори яких допускають розрив за фазовою змінною, з диференціальними рівняннями з розривною правою частиною, із задачами теорії керування та оптимізації та ін. Основним об'єктом досліджень даної роботи є параметризовані операторні нерівності, залежність яких від функціональних параметрів $u \in U$ може бути найрізноманітнішою. Такі об'єкти є типовими складовими математичних моделей багатьох реальних процесів (див., напр., роботи А. О. Чикрія [5]), що мотивує дослідження проблеми їх ров'язності та залежності їх розв'язків від параметра $u \in U$.

У роботах [6, 7] викладені основні результати з теорії розв'язності операторних рівнянь, з урахуванням властивостей монотонності та псевдомонотонності породжуючих їх нелінійних операторів. Більш широкі узагальнення, пов'язані з переходом у класичних означеннях до підпослідовностей, були запропоновані І. В. Скрипником [8]. Це дало можливість розглядати клас λ_0-псевдомонотонних відображень, замкнений відносно суми відображень, що раніше було проблематичним. Реалізація цієї ідеї, щодо проблем розв'язності стаціонарних операторних включень та мультиваріаційних нерівностей, знайшла своє відображення в роботах В. С. Мельника та М. З. Згуровського [3, 9–11], а еволюційні включення та нерівності розглядалися в роботах [12, 13].

У даній роботі вводиться аналог властивості S_k, запропонованої І. В. Скрипником [8], для випадку багатозначних операторів (далі позначатимемо його через $\overline{S_k}$). Клас таких операторів містить як власну підмножину оператори λ_0-псевдомонотонного типу і, на відміну від таких операторів, S_k є інваріантною відносно операції множення відображення на (-1). Хоча клас багатозначних операторів, які задовольняють властивість $\overline{S_k}$, досі системамично не вивчався, у роботі доводиться теорема про розв'язність відповідних операторних та, зокрема, мультиваріаційних нерівностей і досліджуються основні властивості множини їх розв'язків.

Постановка задачі. Нехай X — рефлексивний банахів простір над полем дійсних чисел, X^* — топологічно спряжений до нього простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X \colon X^* \times X \to \mathbb{R}$ — операція канонічного спарювання, 2^{X^*} — сукупність усіх підмножин простору X^*, $A\colon X \to 2^{X^*}$ — багатозначне відображення,

$$\operatorname{Dom} A = \{y \in X \mid A(y) \neq \varnothing\}, \qquad \operatorname{gr} A = \{(\xi; y) \in X^* \times X \mid \xi \in A(y)\}.$$

Всюди далі багатозначне відображення A, для якого $\operatorname{Dom} A = X$, будемо називати строгим і позначати його як $A\colon X \rightrightarrows X^*$. Зі строгим багатозначним відображенням A пов'яжемо його верхню $[A(y), \xi]_+ = \sup\limits_{d \in A(y)} \langle d, \xi \rangle_X$ та нижню $[A(y), \xi]_- = \inf\limits_{d \in A(y)} \langle d, \xi \rangle_X$ опорні функції, де $y, \xi \in X$. Нехай також $\|A(y)\|_+ = \sup\limits_{d \in A(y)} \|d\|_{X^*}$, $\|A(y)\|_- = \inf\limits_{d \in A(y)} \|d\|_{X^*}$ [14]. Будемо також пов'язувати з відображенням $A\colon X \rightrightarrows X^*$ відображення $\operatorname{co} A\colon X \rightrightarrows X^*$ та $\overline{\operatorname{co}} A\colon X \rightrightarrows X^*$, які визначені за правилами $(\operatorname{co} A)(y) = \operatorname{co}(A(y))$ та $(\overline{\operatorname{co}} A(y)) = \overline{\operatorname{co}}(A(y))$ відповідно. Тут через $\overline{\operatorname{co}}(A(y))$ позначено слабке замикання в просторі X^* опуклої оболонки множини $A(y)$.

Нехай далі Y — рефлексивний або сепарабельний нормований простір, Y^* — спряжений до нього простір, U — непорожня, опукла, $*$-слабко замкнена множина в Y^*. Для багатозначного відображення $A\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ і непорожньої замкненої в просторі X опуклої множини K параметризованою мультиваріаційною нерівністю будемо називати такий об'єкт:

$$[A(y, u), \xi - y]_+ \geqslant \langle f, \xi - y \rangle_X \qquad \forall \xi \in K, \tag{1}$$

де $f \in X^*$.

Класи багатозначних відображень. Введемо такі поняття:

Означення 1. Багатозначне відображення $A\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ називається λ-*квазімонотонним*, якщо для довільної послідовності $\{y_n, u_n\}_{n \geqslant 1} \subset X \times U$ такої, що для деяких $y_0 \in X$, $u_0 \in U$ $y_n \to y_0$ слабко в X, $u_n \to u_0$ $*$-слабко в Y^* при $n \to +\infty$, з нерівності

$$\varlimsup_{n \to \infty} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X \leqslant 0,$$

де $d_n \in \overline{\operatorname{co}} A(y_n, u_n)$, $\forall\, n \geqslant 1$, випливає існування підпослідовності $\{y_{n_k}, u_{n_k}\}_{k \geqslant 1}$ з $\{y_n, u_n\}_{n \geqslant 1}$, для якої виконується

$$\varliminf_{k \to \infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w \rangle_X \geqslant [A(y_0, u_0), y_0 - w]_- \qquad \forall\, w \in X.$$

Означення 2. Будемо казати, що відображення $A\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ задовольняє властивість $\overline{S_k}$, якщо з того, що $y_n \to y_0$ слабко в X, $U \ni u_n \to u_0 \in U$ $*$-слабко в Y^*, $d_n \to d$ слабко в X^* ($d_n \in \overline{\operatorname{co}} A(y_n, u_n)$ $\forall\, n \geqslant 1$) та з того, що

$$\langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty, \tag{2}$$

випливає $d \in \overline{\operatorname{co}} A(y_0, u_0)$.

Зауваження 1. Якщо $A\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ задовольняє властивість $\overline{S_k}$, то $(-A)\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ також задовольняє дану властивість.

Нижченаведене твердження належним чином впорядковує класи відображень типу $\overline{S_k}$ та λ-квазімонотонного типу.

Твердження 1. *Багатозначне λ-квазімонотонне відображення задовольняє властивість $\overline{S_k}$.*

Лемма 1. *Нехай* $A\colon X\times U \rightrightarrows X^*$ *та* $B\colon X\times U \rightrightarrows X^*$ — λ*-квазімонотонні багатозначні відображення. Тоді* $C := A + B\colon X\times U \rightrightarrows X^*$ — λ*-квазімонотонне багатозначне відображення.*

Доведення аналогічне наведеному в [14].

Означення 3. Будемо казати, що відображення $A\colon X\times U \rightrightarrows X^*$ є *демізамкненим*, якщо з того, що $y_n \to y_0$ сильно в X, $U \ni u_n \to u_0 \in U$ *-слабко в Y^*, $d_n \to d$ слабко в X^* ($d_n \in \overline{\mathrm{co}}A(y_n,u_n)\ \forall\, n \geqslant 1$) випливає, що $d \in \overline{\mathrm{co}}A(y_0,u_0)$.

Твердження 2. *Багатозначне відображення, що задовольняє властивість* $\overline{S_k}$, *є демізамкненим.*

Означення 4. Багатозначне відображення $A\colon X \rightrightarrows X^*$ задовольняє властивість (П), якщо для деякого $k > 0$, деякої обмеженої множини $B \subset X$ та для деякого селектора d ($d(y) \in A(y)\ \forall\, y \in B$) виконується нерівність $\langle d(y), y\rangle_X \leqslant k$ для всіх $y \in B$, тоді існує таке $C > 0$, що $\|d(y)\|_{X^*} \leqslant C$ для всіх $y \in B$.

Зауваження 2. Сума багатозначних відображень, що задовольняють властивість (П), задовольняє властивість (П).

Означення 5. Багатозначне відображення $A : X \rightrightarrows X^*$ називається:

локально обмеженим, якщо для довільного фіксованого $y \in X$ існують константи $m > 0$ і $M > 0$ такі, що $\|A(\xi)\|_+ \leqslant M$, для всіх $\xi \in \{\xi \in X \mid \|y-\xi\|_X \leqslant m\}$;

скінченновимірно локально обмеженим, якщо для довільного скінченновимірного простору $F \subset X$ звуження A на F є локально обмеженим.

З кожним багатозначним відображенням $A\colon X \rightrightarrows X^*$ пов'яжемо відображення $\overline{A}\colon X \times U \rightrightarrows X^*$, $\overline{A}(y,u) = A(y)$, $y \in X$, $u \in U$.

Означення 6. Багатозначний оператор $A\colon X \rightrightarrows X^*$ називається

λ-*псевдомонотонним*, якщо відповідне відображення $\overline{A}\colon X\times U \rightrightarrows X^*$ — λ-квазімонотонне;

$+(-)$-*коерцитивним*, якщо

$$\frac{[A(y),y]_{+(-)}}{\|y\|_X} \to +\infty \qquad \text{при} \qquad \|y\|_X \to +\infty.$$

Означення 7. Багатозначний оператор $A : X \rightrightarrows X^*$ задовольняє властивість S_k, якщо відповідне відображення $\overline{A}\colon X\times U \rightrightarrows X^*$ задовольняє властивість $\overline{S_k}$.

Основні результати. По аналогії з [13] розглянемо випадок, коли $X = V \bigcap W$, де V та W — дійсні рефлексивні банахові простори, неперервно вкладені в деякий відділений лінійний топологічний простір Z; V^*, W^* — відповідні спряжені простори, $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ — спарювання в V та W відповідно. Тоді $X^* = V^* + W^*$ та

$$\langle f,x\rangle_X = \langle v,x\rangle_V + \langle w,x\rangle_W, \qquad f = v+w, \qquad v \in V^*, \qquad w \in W^*.$$

Нехай $A\colon V\times U \rightrightarrows V^*$, $f \in V^*+W^*$, $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_V + \|\cdot\|_W$, $K \subset W$ — непорожня замкнена опукла множина, $\beta\colon W \rightrightarrows W^*$ — багатозначний монотонний, обмежений, радіально напівнеперервний знизу оператор штрафу, який відповідає множині K, тобто $K = \{y \in W \mid \beta(y) \ni 0\}$. Як відомо, для замкнених опуклих K в рефлексивних просторах оператор штрафу існує завжди [13].

Далі, для фіксованих $u \in U$, $f \in X^*$ через $K(u,f)$ позначимо сукупність розв'язків операторної нерівності (1) із множини K.

Теорема 1. *Нехай $K \neq \varnothing$ — замкнена опукла множина в просторі W, багатозначне відображення $A\colon V \times U \rightrightarrows V^*$ — λ-квазімонотонне, $\{u_n\}_{n\geqslant 0} \subset U$, $u_n \to u$ *-слабко в Y^*, $f_n \to f$ сильно в X^*. Тоді*

$$\bigcap_{n\geqslant 1} \overline{\bigcup_{m\geqslant n} K(u_m, f_m)}^{w} \subset K(u, f), \tag{3}$$

де $\overline{D}^{w}$ — слабке замикання множини $D \subset X$ в X.

Якщо додатково існують $u \in U$, $\varepsilon_0 > 0$ та $y_0 \in K \bigcap X$ такі, що

$$\|y\|_X^{-1} \left\{ [A(y,u), y - y_0]_+ + \frac{1}{\varepsilon_0}[\beta(y), y - y_0]_+ \right\} \to +\infty \tag{4}$$

при $\|y\|_X \to \infty$, а відображення $X \ni y \to A(y,u)$ скінченновимірно локально обмежене та задовольняє властивість (Π), то $\forall\, f \in V^* + W^*$ $\exists\, \{y_{\varepsilon_n}\}_{n\geqslant 1} \subset X$ така, що

$$\overline{\mathrm{co}} A(y_{\varepsilon_n}, u) + \frac{1}{\varepsilon_n}\overline{\mathrm{co}}\beta(y_{\varepsilon_n}) \ni f \qquad \forall n \geqslant 1, \tag{5}$$

$\varepsilon_n \to 0+$, $y_{\varepsilon_n} \to y$ слабко в X при $n \to \infty$, а слабко граничний елемент $y \in K$ задовольняє нерівність (1).

Теорема 2. *Нехай вкладення $X \subset W$ компактне, K — непорожня замкнена опукла множина в просторі W, багатозначне відображення $A\colon V \times U \rightrightarrows V^*$ задовольняє властивість $\overline{S_k}$, $\{u_n\}_{n\geqslant 0} \subset U$, $u_n \to u$ *-слабко в Y^*, $f_n \to f$ сильно в X^*. Тоді виконується (3). Більше того, якщо додатково існують $u \in U$, $\varepsilon_0 > 0$ та $y_0 \in K \bigcap X$ такі, що справедливо (4) при $\|y\|_X \to \infty$, а відображення $X \ni y \to A(y,u)$ скінченновимірно локально обмежене та задовольняє властивість (Π), то $\forall\, f \in V^* + W^*$ $\exists\, \{y_{\varepsilon_n}\}_{n\geqslant 1} \subset X$ така, що виконується (5), $\varepsilon_n \to 0+$, $y_{\varepsilon_n} \to y$ слабко в X при $n \to \infty$, а слабко граничний елемент $y \in K$ задовольняє нерівність (1).*

Зауваження 3. Достатньою умовою виконання нерівності є умова $+$-коерцитивності для $A(\cdot, u)\colon X \rightrightarrows X^*$ [13].

Приклад. Розглянемо приклад, який торкається параметризованих операторних включень і ілюструє істотну залежність властивості $\overline{S_k}$ від вибору топологій у просторі функціональних параметрів. Спочатку ми побудуємо обмежене відображення, яке задовольняє властивість $\overline{S_k}$, але не є λ-квазімонотонним і $-A$ також не є λ-квазімонотонним. Нехай $n \geqslant 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область, $X = H_0^1(\Omega)$ — дійсний простір Соболєва [7], $X^* \equiv H^{-1}(\Omega)$, $(u,v)_{L_2} = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx$, u, $v \in L_2(\Omega)$; $((u,v)) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$ — скалярний добуток в $H_0^1(\Omega)$, u, $v \in H_0^1(\Omega)$; $a \cdot b$ — скалярний добуток векторів a, $b \in \mathbb{R}^n$; $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{((u,u))}$, $u \in X$. Нехай ξ_1, ξ_2 — задані функції з $L^\infty(\Omega)$ такі, що

$$\xi_1(x) \leqslant -\alpha < 0 < \alpha \leqslant \xi_2(x) \quad \text{майже скрізь в} \quad \Omega, \tag{6}$$

де $\alpha > 0$. Покладемо

$$U = \left\{ \mathcal{U} = [u_{ij}(x)]_{1\leqslant i,j\leqslant n} \;\middle|\; \begin{array}{l} u_{ji} = u_{ij} \in [L^\infty(\Omega)] \quad \forall\, i,j = 1,\ldots,n \\ \xi_1(x) \leqslant u_{ij}(x) \leqslant \xi_2(x) \text{ м.с. в } \Omega \quad \forall\, i,j = 1,\ldots,n \end{array} \right\}.$$

U утворює непорожню множину рівномірно обмежених симетричних квадратних матриць. Нехай також $X = H_0^1(\Omega)$, $Y = [L^1(\Omega)]^{n\times n}$. Тоді $X^* = H^{-1}(\Omega)$, $Y^* = [L^\infty(\Omega)]^{n\times n}$. Розглянемо множину

$$V = \{\mathcal{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \in [L^\infty(\Omega)]^{n\times n} \colon\ \operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n\},$$

де значення оператора div на векторі $\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^n$ визначається як елемент простору $H^{-1}(\Omega)$ такий, що

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{u}, \phi \rangle_{H_0^1(\Omega)} = -\int\limits_\Omega (\mathbf{u}, \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n}\, dx \qquad \forall\, \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Будемо казати, що функціональний параметр $\mathcal{U}$ є допустимим, якщо $\mathcal{U} \in V \bigcap U$, де множина U означена вище. Множину всіх допустимих параметрів позначимо через U_{sol}. Зауважимо, що U_{sol} — секвенційно компактна множина в $*$-слабкій топології простору $[L^\infty(\Omega)]^{n\times n}$.

Розглянемо оператор $A\colon X \times U_{\mathrm{sol}} \to X^*$, який визначається за правилом

$$A(y, \mathcal{U}) = -\operatorname{div}(\mathcal{U}(x)\nabla y) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j}\right).$$

За допомогою леми про компенсовану компактність [15, c.142] можна одержати, що параметризоване багатозначне відображення задовольняє властивість $\overline{S_k}$. Очевидно, що за рахунок (6) ні A, ні $-A$ не є λ-квазімонотонним. Більше того, поклавши

$$\mathcal{A}(y) = \{A(y, \mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \in U_{\mathrm{sol}}\}, \qquad y \in X,$$

одержимо обмежене багатозначне відображення, яке задовольняє властивість S_k, є $+$-коерцитивним, але не є $-$-коерцитивним, не є λ-псевдомонотонним і $-A$ також не є λ-псевдомонотонним.

1. *Aubin J. P., Frankovska H.* Set-valued analysis. – Boston: Birkhäuser, 1990. – 215 p.
2. *Barbu V., Precupanu N.* Convex analysis and optimization in Banach spaces. – New York: Reidel, 1986. – 420 p.
3. *Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – Киев: Наук. думка, 2004. – 590 с.
4. *Ladas G. E., Lakshmikanthan V.* Differential Equations in Abstract Spaces. – New York: Acad. Press, 1972. – 458 p.
5. *Чикрий А. А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 381 с.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 587 с.
7. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
8. *Скрыпник И. В.* Методы исследования эллиптических краевых задач. – Москва: Наука, 1990. – 442 с.
9. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями. I // Кибернетика и систем. анализ. – 2000. – № 4. – С. 57–69.
10. *Мельник В. С.* Про критичні точки деяких класів багатозначних відображень // Там же. – 1997. – № 2. – С. 87–98.
11. *Мельник В. С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1513–1523.
12. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 324 с.

13. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* О разрешимости дифференциально-операторных включений и эволюционных вариационных неравенств, порожденных отображениями w_{λ_0}-псевдомонотонного типа // Укр. мат. вiсник. – 2007. – **4**, № 4. – С. 535–581.
14. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Yasinsky V. V.* Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with W_λ-pseudomonotone maps. – Київ: Наук. думка, 2007. – 308 с.
15. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. Л.* Усреднение дифференциальных операторов. – Москва: Физматлит, 1993. – 464 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 09.06.2008

P. O. Kasyanov

On the solvability for one class of parametrized multivariational inequalities

We consider the parametrized operator and variation inequalities with maps of the $\overline{S_k}$ type. Sufficient conditions for solvability of the given inequalities and the parameter dependence for their solution sets are derived. The examples illustrating the obtained results are given.