УДК 517.938

М. Ю. Потёмкин

Асимптотическое поведение решений нелинейной задачи термоупругости пластин

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Досліджена асимптотична поведінка розв'язків системи двох абстрактних диференціальних рівнянь, які, зокрема, можуть описувати термопружну пластину в наближенні Бергера з урахуванням і за відсутності доданка, що відповідає механічній дисипації. З цією метою вивчені питання існування компактного глобального атрактора і його структури (гладкість, кінцева фрактальна розмірність та залежність від параметрів задачі). Також наведені умови, за яких атрактор стає експоненціальним.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, $M(\cdot)$ — скалярная функция с положительным аргументом. Система дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} u_{tt} + \gamma u_t + \Delta^2 u + M\left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u - \mu\Delta v = p(x), \qquad x \in \Omega, \qquad t > 0, \\ v_t - \Delta v + \mu\Delta u_t = 0 \end{cases} \tag{1}$$

описывает поведение термоупругой пластины в приближении Бергера (см. [1; 2, гл. 4]). Неизвестные функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ имеют смысл величин вертикального прогиба и температуры соответственно, которые эти функции приобретают в точке $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ и в момент времени $t \geqslant 0$.

Пластина считается шарнирно закрепленной по границе, т. е.

$$u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Температура $v(x,t)$ удовлетворяет граничному условию Дирихле

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Величина $\gamma \geqslant 0$ учитывает сопротивление среды, а ненулевое значение μ обусловлено наличием связи между механическими колебаниями пластины, описываемыми первым уравнением, и температурным режимом, описываемым вторым уравнением. Асимптотическая стабилизация исходной системы к компактному глобальному аттрактору при отсутствии механической диссипации, когда учитывается лишь так называемая термическая диссипация, т. е. случай, когда $\gamma = 0$, — основной результат работы. Используемые методы позволяют охватить одновременно и случай $\gamma > 0$. При этом удалось получить для геометрических характеристик аттрактора оценки, равномерные по $\gamma \geqslant 0$.

Асимптотическое поведение решений рассматривается в контексте теории диссипативных динамических систем (см. [2–4]). Под динамической системой подразумевается пара объектов (X, S_t), где X — полное метрическое пространство, играющее роль фазового пространства, а S_t, $t \geqslant 0$, — семейство непрерывных операторов вида $S_t\colon X \to X$. Требуется также непрерывность отображения $t \to S_t x$ при любом $x \in X$ и выполнение полугруппового свойства

$$S_{t+\tau}x = S_t \circ S_\tau x \qquad \forall\, t, \tau \geqslant 0, \qquad \forall\, x \in X, \qquad S_0 = I.$$

Основной характеристикой поведения диссипативной динамической системы при $t \to \to +\infty$ является глобальный аттрактор A (см. [2–4]) — замкнутое ограниченное строго инвариантное ($S_t A = A\ \forall\, t \geqslant 0$) подмножество фазового пространства, обладающее свойством равномерного притяжения, т. е. для любого ограниченного множества $B \subset X$ верно равенство

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{y\in B} \operatorname{dist}_X(S_t y, A) = 0.$$

Прежде чем формулировать основные результаты, перепишем задачу (1)–(3) в абстрактной форме. Пусть $H = L^2(\Omega)$ с нормой $\|\cdot\| = |\cdot|_{L^2(\Omega)}$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$. Определим оператор $A\colon D(A) \subset H \to H$ следующим образом:

$$Au = -\Delta u, \qquad u \in D(A) = H^2(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega).$$

Хорошо известно (см., напр., [4]), что так определенный оператор A — строго положительный самосопряженный, имеющий дискретный спектр $\{\lambda_k\}_k^\infty$ такой, что

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots, \qquad \lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty,$$

а множество соответствующих собственных векторов $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ образует базис гильбертова пространства H.

Введем также вспомогательную шкалу гильбертовых пространств F_s, $s \geqslant 0$:

$$F_s = \left\{ u \in H \,\middle|\, \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{2s}(u, e_k)^2 < \infty \right\},$$

со скалярным произведением

$$(u, v)_s = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{2s}(u, e_k)(v, e_k).$$

Учитывая все введенные обозначения и граничные условия (2) и (3), можем переписать исходную задачу в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} + \gamma u_t + A^2 u + M(\|A^{1/2}u\|^2)Au + \mu A v = p, \\ v_t + Av = \mu A u_t, \end{array} \right. \tag{4}$$

дополнив (4) начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad u_t|_{t=0} = u_1, \qquad v|_{t=0} = v_0. \tag{5}$$

Пусть W_T^σ — функциональное пространство, определяемое равенством

$$W_T^\sigma = \{u(t) \mid u(t) \in L^2(0,T;F_\sigma), u_t(t) \in L^2(0,T;F_0)\}.$$

Определение. Слабым решением задачи (4), (5) на интервале $[0,T]$ называется пара функций $u \in W_T^1$, $v \in L^2(0,T;F_{1/2})$, удовлетворяющих равенствам

$$-\int_0^T (\dot{u} + \gamma u, \dot{w}_1)dt + \int_0^T (Au + M(\|A^{1/2}u\|^2)u + \mu v, Aw_1)dt =$$

$$= (u_1 + \gamma u_0, w_1(0)) + \int_0^T (p, w_1)dt,$$

$$-\int_0^T (v - \mu Au, \dot{w}_2)dt + \int_0^T (A^{1/2}v, A^{1/2}w_2)dt = (v_0 - \mu Au_0, w_2(0))$$

для любых $w_1 \in W_T^1$, $w_2 \in W_T^{1/2}$ таких, что $w_1(T) = w_2(T) = 0$. Причем, $u(0) = u_0$.

Для задачи (4), (5) верен следующий результат о корректной разрешимости:

Теорема 1. *Пусть:*

1) $M(z) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и $\exists\, \alpha \in (0,\lambda_1)$ $\exists\, \beta \in \mathbb{R}$: $\mathcal{M}(z) \equiv \int\limits_0^z M(\xi)d\xi \geqslant -\alpha z + \beta$, $p \in H$;

2) $(u_0; u_1; v_0) \in \mathcal{H} \equiv F_1 \times F_0 \times F_0$.

Тогда на любом интервале $[0,T]$ существует единственное слабое решение задачи (4), (5) $U(t) = (u(t); u_t(t); v(t)) \in C([0,T];\mathcal{H})$, при этом $\forall\, R > 0$ $\exists\, a_R > 0$ $\forall U_{10}, U_{20} \in \mathcal{H}$ $|U_{i0}| \leqslant R$, $i = \overline{1,2}$:

$$|U_1(t) - U_2(t)|_{\mathcal{H}} \leqslant e^{a_R t}|U_{10} - U_{20}|_{\mathcal{H}}, \qquad t > 0,$$

где $U_i(t)$ — решения (4), (5) с начальными условиями U_{i0}, а a_R не зависит от γ. Причем если $u_0 \in F_2$, $u_1 \in F_1$, $v_0 \in F_1$, то решение (u,v) является сильным, т. е. $(u(t); u_t(t); v(t)) \in$ $\in C(\mathbb{R}_+; F_2 \times F_1 \times F_1)$, $v \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; F_{3/2})$ и функции $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют каждому из равенств системы (4) в пространстве H.

Определим в пространстве $\mathcal{H}$ динамическую систему, порожденную решениями задачи (4), (5), следующим образом:

$$S_t(u_0; u_1; v_0) \equiv U(t) = (u(t); u_t(t); v(t)), \qquad (u_0; u_1; v_0) \in \mathcal{H},$$

где $U(t) = (u(t); u_t(t); v(t))$ — соответствующее решение (4), (5).

Первый основной результат работы посвящен доказательству существования аттрактора и установлению некоторых его свойств, равномерных по γ, в частности того, что фрактальная размерность аттрактора конечна. Под фрактальной размерностью (см., напр., [3, 4]) $\dim_f^X M$ компактного множества M, принадлежащего полному метрическому пространству X, понимается число

$$\dim_f^X M = \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\ln N(M,\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

где $N(M,\varepsilon)$ — минимальное количество замкнутых множеств в X диаметра ε, полностью покрывающих M.

Теорема 2. *Для каждого $\gamma \in [0,1]$ динамическая система $(\mathcal{H}, S_t)$ обладает компактным глобальным аттрактором A^γ конечной фрактальной размерности. Более того, имеют место следующие свойства:*

I. Существует число $d_0 > 0$, которое не зависит от γ, такое, что

$$\dim_f^X A^\gamma \leqslant d_0 \qquad \forall\, \gamma \in [0,1].$$

II. Существует константа $C > 0$, которая не зависит от $\gamma \in [0,1]$, такая, что любая полная траектория $\{U(t) = (u(t); u_t(t); v(t)) | t \in \mathbb{R}\}$, целиком лежащая в аттракторе A^γ, в любой момент времени $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет оценке

$$\|u_{tt}(t)\|^2 + \|Au_t(t)\|^2 + \|A^2 u(t)\|^2 + \|v_t(t)\|^2 + \|Av(t)\|^2 \leqslant C.$$

III. Семейство глобальных аттракторов A^γ полунепрерывно сверху по $\gamma \in [0,1]$, т. е. для любого $\gamma_0 \in [0,1]$ верно равенство

$$\lim_{\gamma \to \gamma_0} \sup\{\mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(U, A^{\gamma_0}) \mid U \in A^\gamma\} = 0.$$

IV. a. Глобальный аттрактор A^γ при всех $\gamma \in [0,1]$ состоит из полных траекторий $\pi = \{U(t) | t \in \mathbb{R}\}$ таких, что

$$\lim_{t \to -\infty} \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(U(t), \mathcal{N}) = 0 \wedge \lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(U(t), \mathcal{N}) = 0,$$

где $\mathcal{N} = \{U \in \mathcal{H} \mid S_t U = U\, \forall\, t > 0\}$ — множество стационарных точек.

Более того, для любого $x \in \mathcal{H}$

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(S_t x, \mathcal{N}) = 0.$$

b. Если при этом множество $\mathcal{N}$ конечно, т. е. $\mathcal{N} = \{P_1, \ldots, P_n\}$, то для любой траектории из аттрактора $\pi = \{U(t) | t \in \mathbb{R}\}$ существуют такие стационарные точки P, $P^* \in \mathcal{N}$, что

$$\lim_{t \to -\infty} \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(U(t), P) = 0 \wedge \lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}_{\mathcal{H}}(U(t), P^*) = 0.$$

При доказательстве теоремы 2 существенно используются методы, развитые в [5]. Основную роль при этом играет стабилизационное неравенство.

Лемма 1. *Пусть (u^1, v^1) и (u^2, v^2) будут решениями задачи (4), (5). Предположим, что*

$$\|Au^i(t)\|^2 + \|u_t^i(t)\|^2 + \|v^i(t)\|^2 \leqslant R^2 \qquad \forall\, i = \overline{1,2}$$

для любого $t \geqslant 0$. Положим

$$Z(t) \equiv (z(t); z_t(t); \xi(t)) = (u^1(t) - u^2(t); u_t^1(t) - u_t^2(t); v^1(t) - v^2(t)).$$

Тогда существуют положительные константы C_R и ω, которые не зависят от γ и

$$|Z(t)|^2 \leqslant C_R |Z(0)|^2 e^{-\omega t} + C_R \sup_{\tau \in [0,t]} \|z(\tau)\|^2,$$

где $|\cdot|$ — норма в пространстве $\mathcal{H}$.

Подобный тип неравенств, первоначально возникший при решении различных задач динамики диссипативных колебаний (см. [5–8] и приведенную в этих работах библиогр.), становится важным инструментом в изучении таких вопросов, как конечная размерность и гладкость глобальных аттракторов. Уместно также отметить, что эти оценки не являются следствием каких-либо общих абстрактных результатов, их вывод сильно зависит от специфики изучаемой модели.

Геометрическая структура аттрактора описана в п. IV теоремы 2. Утверждение этого пункта является следствием того, что рассматриваемая динамическая система, обладающая компактным глобальным аттрактором, является градиентной (см. [2, гл. 2]), т. е. существует такой непрерывный функционал $\Phi(x)\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, что отображение $t \to \Phi(S_t y)$ монотонно не возрастает при любом $y \in \mathcal{H}$ и из равенства $\Phi(S_t y) = \Phi(y)$ при всех $t > 0$ следует, что $S_t y = y$ при всех $t > 0$, т. е. y — стационарная точка.

Для данной динамической системы такой функционал Φ имеет смысл полной энергии системы и определяется следующим равенством:

$$\Phi(u_0, u_1, v_0) = \frac{1}{2}[\|Au_0\|^2 + \|u_1\|^2 + \|v_0\|^2 + \mathcal{M}(\|A^{1/2}u_0\|^2)] - (p, u_0).$$

Множество стационарных точек имеет вид

$$\mathcal{N} = \{(u; 0; 0) | A^2 u + M(\|A^{1/2}u\|^2)Au = p\}.$$

Заметим, что $\mathcal{N}$ не зависит от $\gamma \in [0, 1]$.

В случае, когда $M(z) \geqslant 0$, как следствие из вышеприведенной теоремы, вытекает, что аттрактор состоит из одной только точки и система глобально асимптотически устойчива.

Второй основной результат работы посвящен экспоненциальности аттрактора.

В случае, когда стационарных точек конечное число и каждая из них является гиперболической согласно определению, которое будет дано ниже, оказывается, что каждая траектория стремится к стационарной точке с экспоненциальной скоростью.

Стационарная точка P называется гиперболической (см. [3]), если линейный оператор $L_t = D[S_t P]$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\sigma(L_t) \bigcap \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\} = \oslash \qquad \forall\, t \geqslant 0,$$

где $\sigma(L_t)$ — спектр оператора L_t.

Теорема 3. *Пусть, как и прежде, $\mathcal{N} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ — множество стационарных точек. И каждая $P_i \in \mathcal{N}$ удовлетворяет определению гиперболической точки. Тогда:*

I. Существует положительная константа $\omega > 0$ такая, что для любого $U_0 \in \mathcal{H}$ существует стационарная точка $P_i \in \mathcal{N}$ и положительная константа C_{U_0} такая, что

$$|S_t U_0 - P_i| \leqslant C_{U_0} e^{-\omega t}, \qquad t > 0.$$

Более того, для любого ограниченного множества B из $\mathcal{H}$ существует положительная константа $C_B > 0$ такая, что верна оценка

$$\sup\{\mathrm{dist}(S_t U, A) | U \in B\} \leqslant C_B e^{-\omega t}, \qquad t > 0,$$

где A — глобальный аттрактор.

II. Фрактальная размерность аттрактора удовлетворяет следующему равенству

$$\dim_f^{\mathcal{H}} A = \max_{P_i \in \mathcal{N}} \operatorname{ind}(P_i),$$

где $\operatorname{ind}(P_i)$ *— размерность спектрального подпространства оператора* L_1*, которое соответствует множеству* $\{z \in \sigma(L_1) \colon |z| > 1\}$.

Таким образом, по решениям уравнений (4), (5) построена динамическая система, доказано существование компактного глобального аттрактора конечной размерности и рассмотрены его свойства.

1. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – Москва: Наука, 1989. – 296 с.
2. *Чуешов И. Д.* Введение в теорию бесконечномерных диссипативных систем. – Харьков: Акта, 1999. – 433 с.
3. *Berger M.* A new approach to the large deflection of plate // J. Appl. Mech. – 1955. – **22**. – P. 465–472.
4. *Chueshov I., Lasiecka I.* Attractors and long time behavior of von Karman thermolastic plates // Appl. Math. and Optim. – 2008. – No 58. – P. 195–241.
5. *Chueshov I., Lasiecka I.* Attractors for second-order evolution equations with a nonlinear damping // J. Dynam. Different. Equat. – 2004. – **16**, No 2. – P. 469–512.
6. *Chueshov I., Lasiecka I.* Long-time behaviour of second order evolution equations with nonlinear damping // Memoirs of AMS. No 912. – Providence, RI: AMS, 2008. – 188 p.
7. *Chueshov I., Lasiecka I.* Long-time dynamics of semilinear wave equation with nonlinear interior/boundary damping and sources of critical exponents. Control methods in PDE-dynamical systems // Contemp. Math. – 2007. – No 426. – P. 153–192.
8. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – New York: Springer, 1988. – 500 p.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 16.06.2008

M. Yu. Potemkin

Asymptotic behavior of solutions of a non-linear thermoelastic plate problem

The asymptotic behavior of solutions of a system of two differential equations that, in particular, describe a thermoelastic plate in Berger's approach with and without a mechanical dissipation term is considered. The questions of the existence of a compact global attractor and its structure (such as smoothness, finite fractal dimensionality, and dependence on parameters) are studied. The conditions, under which the attractor becomes exponential, are given.