УДК 519.6

О. М. Литвин, Н. І. Штепа

Математичне моделювання розподілу корисних копалин за допомогою інтерлінації функцій трьох змінних

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Будуються і досліджуються оператори інтерлінації (blending function interpolation) функції 3-х змінних зі слідами цієї функції на системі прямих, паралельних осі Oz і нерегулярно розміщених в області дослідження. При побудові цих операторів використовуються узагальнені формули Шепарда і Тейлора–Рвачова.

1. Постановка задачі. Математичне моделювання приповерхневого шару Землі (кори Землі) використовує результати аналізу буріння свердловин, сейсморозвідку, результати зміни гравітаційного та магнітного полів вздовж траєкторій руху штучних супутників планети тощо. Експериментальні дані, отримані за допомогою буріння свердловин, являють собою набір прямих — свердловин $\Gamma_k\colon (X_k, Y_k, z)$; $X_k, Y_k \in E$, $E = [0, 1]$; $0 \leqslant z \leqslant H$, $k = \overline{1, M}$, та функцій $f_k(z)$, $k = \overline{1, M}$, що є розподілом щільності грунту залежно від глибини z у свердловині Γ_k. Вісь Oz системи координат $Oxyz$ направлена в глибину планети. Тобто, відомими є:

а) система прямих Γ_k, $k = \overline{1, M}$;

б) система слідів на цих лініях деякої функції (взагалі кажучи, невідомої) $f(x, y, z) \in C^r(D)$, $D = E^2$, $r \geqslant 0$, $f_k(z) = f(X_k, Y_k, z)$, $k = \overline{1, M}$.

Треба побудувати за допомогою цієї інформації оператори інтерлінації $L_M(\{\Gamma_k\}; x, y, z)$ з властивостями: $L_M((\{\Gamma_k\}; X_j, Y_j, z) = f_j(z)$, $j = \overline{1, M}$.

Ця задача, як і задача інтерполяції, не має єдиного розв'язку, але при деяких обмеженнях на систему прямих Γ_k такі оператори існують і єдині.

2. Аналіз відомих результатів. Вказані вище експериментальні дані мають ряд особливостей, що утруднюють їх використання для математичного моделювання структури приповерхневого шару планети.

Це, по-перше, нерегулярне розміщення точок $P_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, M}$, на поверхні, яку ми умовно будемо ототожнювати з площиною $z = 0$ (на практиці точки початку свердловини знаходяться на різних висотах, тому для математичної обробки таких даних необхідно звести їх до однієї висоти над рівнем океану). Ця нерегулярність не дозволяє використовувати для математичного моделювання класичні методи, в яких істотним є регулярне розміщення: $P_{k,\ell}(x_k, y_\ell)$, $k = \overline{1, M}$, $\ell = \overline{1, M}$.

По-друге, функції $f_k(z)$, $k = \overline{1, M}$, мають розриви першого роду у точках, де змінюється структура керну (чорнозем, глина, пісок, вода, граніт, сіль, руда, вугілля, нафта, газ тощо мають різні щільності, причому точки розриву розміщені нерегулярно залежно від глибини z і їх кількість може бути різною для різних свердловин). Це означає, що використання похідних високого порядку для оцінки похибки наближення неможливе — їх нема в реальності.

Тому актуальною є розробка і дослідження такого математичного апарату для математичного моделювання приповерхневого розподілу порід, який би дозволив отримати математичну модель для довільного розподілу точок $P_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, M}$, на поверхні (з обмеженнями, що не допускають значного скупчення свердловин у частині $Q \subset D \subset E^2$ області D дослідження), яка для деякого класу функцій розподілу давала б допустимі з практичної точки зору наближення. Таку можливість надає теорія інтерлінації функцій трьох змінних на системі довільних прямих, паралельних осі Oz, що пропонується і досліджується в даній роботі. Вона істотно використовує глобальну інтерполяційну формулу Шепарда і формулу Тейлора–Рвачова.

Оператори поліноміальної інтерлінації $L_{m,n}f(x,y)$ функцій двох змінних на системі взаємно перпендикулярних прямих $x = X_i$, $y = Y_j$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, досліджувалися в роботах [1–9]. Поліноміальний базис x^i, y^j, $x^i y^j$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$; $0 \leqslant j \leqslant n-1$, що задовольняє диференціальне рівняння $\partial^{m+n}u/(\partial x^m \partial y^n) = 0$, є частинним випадком базису, що задовольняє диференціальне рівняння загального вигляду

$$\sum_{p=0}^{m} a_p(x)\frac{\partial^p}{\partial x^p}\sum_{q=0}^{n} b_q(y)\frac{\partial^q u}{\partial y^q} = 0,$$

$a_p(x)$, $b_q(y) \in C(R)$. Це дозволяє стверджувати, що в загальному випадку можна отримати кращу точність наближення до конкретної функції $f(x,y)$ або до конкретного класу функцій. Тому в роботах [10, 11] досліджувалась інтерлінація на системі взаємно перпендикулярних прямих, яка використовувала для побудови узагальнені поліноми, що є розв'язками диференціальних рівнянь з частинними похідними і сталими коефіцієнтами. При цьому використовувався класичний вибір ліній інтерлінації — $P_{k,\ell}(x_k, y_\ell)$, $k = \overline{1, M}$, $\ell = \overline{1, M}$. Для математичного моделювання приповерхневого шару Землі за даними буріння свердловин виникає задача наближення функцій трьох змінних $f(x,y,z)$ за допомогою їх слідів на системі паралельних прямих Γ_k, $k = \overline{1, M}$, що нерегулярно розміщені в D. Тому актуальною є задача побудови і дослідження операторів інтерлінації функцій трьох змінних на кількох прямих для випадку, коли прямі інтерлінації розміщені довільно області D. Для розв'язання цієї задачі в даній роботі пропонується використовувати узагальнення інтерполяційної формули Шепарда і багатоточкової формули Рвачова–Тейлора [5, 12, 13] на випадок інтерлінації функцій трьох змінних.

3. Оператори узагальненої інтерлінації функцій трьох змінних на системі паралельних прямих. Дослідимо інтерлінацію функцій трьох змінних операторами, що використовують узагальнені поліноми

$$L_M(\{\Gamma_k\}; x, y, z) = \sum_{k=0}^{M} f_k(z) L_k(x,y),$$

$$L_k(x,y) = \prod_{\ell=1,\ell\neq k}^{M} \frac{d(P, P_\ell)^q}{d(P_k, P_\ell)^q},$$

$$P = (x,y), d(P_k, P_\ell) = \sqrt{(X_k - X_\ell)^2 + (Y_k - Y_\ell)^2}.$$

Нижче формулюються основні твердження про властивості цих операторів узагальненої поліноміальної інтерлінації на системі прямих, паралельних осі Oz, та представлення залишкових членів наближення з їх допомогою неперервних та диференційовних функцій.

Лема 1. *Якщо* $q > 0$, *то допоміжні функції* $L_j(x, y)$, $j = \overline{1, M}$, *задовольняють умови*

$$L_j(x_k, y_k) = \delta_{j,k}, \qquad j, k = \overline{1, M}.$$

Лема 2. *Якщо* $q > 0$, *то система допоміжних функцій* $L_j(x, y)$, $j = \overline{1, M}$, *є невід'ємною*

$$L_j(x, y) \geqslant 0 \quad \forall\, j = \overline{1, M}.$$

Лема 3. *Якщо* $q > 0$, *то система допоміжних функцій* $L_j(x, y)$, $j = \overline{1, M}$, *є розкладенням одиниці*

$$\sum_{j=1}^{M} L_j(x, y) = 1 \qquad \forall\, (x, y) \in R^2.$$

Теорема 1. *Оператори*

$$L_M(\{\Gamma_k\}) f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{M} f(x_k, y_k, z) L_k(x, y)$$

є операторами інтерлінації функції $f(x, y, z)$ *на системі прямих* Γ_k, $k = \overline{1, M}$:

$$L_M(\{\Gamma_k\}) f(x_j, y_j, z) = f(x_j, y_j, z), \qquad 0 \leqslant z \leqslant H, \qquad j = \overline{1, M}.$$

Теорема 2. *Для залишку* $Rf(x, y, z) = (I - L_M(\{\Gamma_k\})) f(x, y, z)$ *наближення функції* $f(x, y, z)$ *оператором інтерлінації* $L_M(\{\Gamma_k\})) f(x, y, z)$ *виконується таке інтегральне зображення:*

$$Rf(x, y) = \sum_{k=1}^{M} \int\limits_{0}^{1} \frac{\partial f(x_k + t(x - x_k), y_k + t(y - y_k), z)}{\partial t} dt L_k(x, y) \qquad \forall\, f \in C^1(D).$$

Теорема 3. *Для залишку* $Rf(x, y, z)$ *виконується оцінка*

$$|Rf(x, y, z)| \leqslant C \sum_{k=1}^{M} (|x - x_k| + |y - y_k|) L_k(x, y) \qquad \forall\, f \in C^1(D \times [0, H]),$$

$$C = \max_{(x,y) \in D,\, 0 \leqslant z \leqslant H} \left\{ \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right| \right\}.$$

Таким чином, максимальне значення похибки істотно залежить від розміщення прямих інтерлінації Γ_k, $k = \overline{1, M}$, і оцінюється через функцію

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{k=1}^{M} (|x - x_k| + |y - y_k|) L_k(x, y) \qquad \forall\, (x, y, z) \in (D \times [0, H]).$$

Формула для операторів $L_M(\{\Gamma_k\}) f(x, y, z)$ при фіксованих значеннях змінної z, $0 \leqslant \leqslant z \leqslant H$ є глобальною інтерполяційною формулою Шепарда при $q = 1$. Вона розглядалася в роботах [13, 14]. Зауважимо, що багатоточкова формула Тейлора, запропонована

В. Л. Рвачовим [6], фактично є формулою Шепарда при $q = 1$. Нижче наведемо деякі твердження про швидкість збіжності операторів інтерлінації $L_M(\{\Gamma_k\})\ f(x, y, z)$ функцій трьох змінних, які істотно опираються на відомі властивості глобальної формули Шепарда.

1. Лінійний оператор інтерлінації $L_M(\{\Gamma_k\})\ f(x, y, z)$ є стійким у тому розумінні, що

$$\min_{1\leqslant i\leqslant M} f(x_i, y_i, z) \leqslant L_M(\{\Gamma_k\})f(x, y, z) \leqslant \max_i f(x_i, y_i, z) \qquad \forall\, z \quad 0 \leqslant z \leqslant H.$$

2. Оператор $L_M(\{\Gamma_k\})f$ є оптимальним у деякому розумінні серед усіх "універсально" стійких раціональних інтерполяційних операторів. Але порядок апроксимації стійких операторів інтерполяції не може перевищувати $M^{-1/n}$, де n — розмірність простору $\mathbb{R}^n$ [14]. Це твердження справедливе також і для $L_M(\{\Gamma_k\})f$ при кожному фіксованому z.

3. Якщо $p > 1$, то $L_M(\{\Gamma_k\})f(x, y, z)$ має такі властивості:

$$\frac{\partial^{r+s} L_M(\{\Gamma_k\})f(x, y, z)}{\partial x^r \partial y^s} = 0, \quad (x, y) = (x_k, y_k), \quad 0 \leqslant z \leqslant H, \quad k = \overline{1, M}, \quad r + s = 1.$$

4. Обчислення $L_M(\{\Gamma_k\})f(x, y, z)$ вимагає значної роботи. Цей недолік можна усунути за допомогою локальної версії формули Шепарда, у якій базисні функції $L_j(x, y)$ мають "малі" компактні носії, геометрична форма яких залежить від розподілу даних ліній інтерлінації $\Gamma_k,\ k = \overline{1, M}$.

З наведених результатів видно, що оператори $L_M(\{\Gamma_k\})f$ (як додатні оператори) мають невисоку точність. Але в роботі [15] доведено, що інтерполяційні оператори Шепарда функції однієї змінної зберігають глобальну гладкість функції f. Враховуючи важливу роль операторів, що зберігають ті чи інші властивості наближуваної функції f, в деяких задачах (зокрема, в досліджуваній в даній роботі задачі) невелика точність операторів $L_M(\{\Gamma_k\})f$ може бути не дуже суттєвою.

1. *Mangeron D.* Sopra un problema al contorno per un' equatione differentiable alle derivative parziali di quartordine conle caratteristice reali dopie // Rend. Acad. Sci. Fiz. Matt., Napoli. – 1932. – No 2. – P. 28–40.
2. *Coons S. A.* Surface for computer-aided design of space forms // Project Mac report MAC-TR – **41**. – Cambridge, 1967. – P. 3–30.
3. *Алберг Д. Е., Нильсон Е., Уолш Д.* Теория сплайнов и ее приложения / Пер. с англ. – Москва: Мир, 1972. – 316 с.
4. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 550 с.
5. *Литвин О. М., Рвачов В. Л.* Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування. – Київ: Наук. думка, 1972. – 122 с.
6. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
7. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – Київ: Наук. думка, 2005. – 331 с.
8. *Литвин О. Н., Сергиенко И. В.* Методы аппроксимации функций и современные компьютерные технологии. Обзор // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 1. – С. 64–81.
9. *Lytvyn O. N.* Interlineation and interflatation functions of many variables (blending functions interpolation) and economical algorithms in the approximation theory // Comput. Methods. Proc. 1st Intern. Conf. of Comput. Methods. – Singapore, 15–17 December 2004. – (G. R. Liu, V. B. C. Tan, X. Han ed.) Band 2. – Springer, 2006. – P. 1105–1110.
10. *Литвин О. М., Штепа Н. І.* Оператори інтерлінації лагранжевого типу на системі взаємно перпендикулярних прямих з використанням узагальнених поліномів // Доп. НАН України. – 2008. – № 5. – С. 25–29.
11. *Литвин О. Н.* Формулы Тейлора и Даламбера. Интерлинация функций. Методика изучения. Рекомендации преподавателям и студентам. – Киев: УМК ВО, 1990. – 48 с.

12. *Shepard D.* Two-Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data. – Proc. 23rd Nat. Conf. ACM. – 1968. – P. 517–524.
13. *Barnhill R. E., Dube R. P., Little F. F.* Properties of Shepard's surfaces // Rocky Mountain J. Math. – 1983. – **13**. – P. 365–382.
14. *Reinhard F.* Rate of Convergence of Shepard's Global Interpolation Formula // Mathemat. of Comput. – 1986. – **46**, No 174. – P. 577–590.
15. *Gal S. G., Szabados J.* On the preservation of global smoothness by some interpolation operators // Studia Scient. Math. Hungaria. – 1999. – **35**. – P. 397–414.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 21.05.2008

O. M. Lytvyn, N. I. Shtepa

Simulation of a distribution of minerals with the help of the interlineation of functions of three variables

The operators of interlineation of a function of three variables (blending function interpolation) with traces of this function on the system of straight lines parallel to the Oz axis are constructed and investigated. These straight lines are irregularly placed in the region under study. On the construction of these operators, the generalized Shepard's and Taylor-Rvachev's formulas are used.