ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2009

МЕХАНІКА

УДК 621.318.001.2

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко, К. Б. Мягкохлеб**

Энергетический метод определения коэффициентов упругости в электромагнитных вибровозбудителях

Визначено формули коефіцієнтів пружності пружин в електромагнітних віброзбуджувачах.

Электромагнитные вибровозбудители (ЭМВ) применяются в различном технологическом оборудовании, испытательных стендах [1]. Принцип их функционирования при соленоидном исполнении адекватен работе электромагнитных компрессоров. Конструктивно ЭМВ могут быть без реактивной массы (РМ) и с РМ. Последняя особенно целесообразна в вибростендах для обеспечения виброизоляции корпуса ЭМВ и фундамента от разрушительного действия возбуждаемой в ЭМВ вибрации якоря (Я). В ЭМВ имеются пружины (Пр) и знание их коэффициентов упругости (жесткости) необходимо в расчетах элементов ЭМВ. В связи с этим в данной работе остановимся на определении аналитических связей коэффициентов упругости пружин с электромагнитомеханическими параметрами и величинами ЭМВ. Данное исследование будем осуществлять для ЭМВ без РМ и с РМ. Первая электромагниомеханическая схема ЭМВ приведена на рис. 1, *а*, где М — магнитопровод; Я — якорь; ВН — весовая нагрузка; $\text{Пр}_\text{я}$ — пружина; δ_0 — воздушный зазор; О — электрическая обмотка; U — задающее напряжение.

Дифференциальное уравнение движения Я + ВН имеет вид

$$m_\text{я}\frac{d^2x_\text{я}}{dt^2} + b_\text{я}\frac{dx_\text{я}}{dt} + c_\text{я}x_\text{я} = F + P_\Sigma, \tag{1}$$

где $m_\text{я}$ — масса Я + ВН $((P_\text{я}+P_\text{ВН})/g$, $P_\text{я}$, $P_\text{ВН}$ — веса Я и ВН соответственно; g — ускорение свободного падения тел); $b_\text{я}$, $c_\text{я}$ — коэффициенты диссипации и упругости соответственно; F — тяговое усилие в ЭМВ; $P_\Sigma = P_\text{я} + P_\text{ВН}$; $x_\text{я}$ — перемещение якоря с ВН; t — время.

Тяговое усилие выражается в виде [2]

$$F(t) = \mu_0 S\left(\frac{iw}{2\delta}\right)^2 = \mu_0 S\left(\frac{I_a w}{2\delta}\right)^2 \sin^2(\omega t - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 S\left(\frac{I_a w}{2\delta}\right)^2 - \frac{1}{2}\mu_0 S\left(\frac{I_a w}{2\delta}\right)^2 \cos 2(\omega t - \varphi), \tag{2}$$

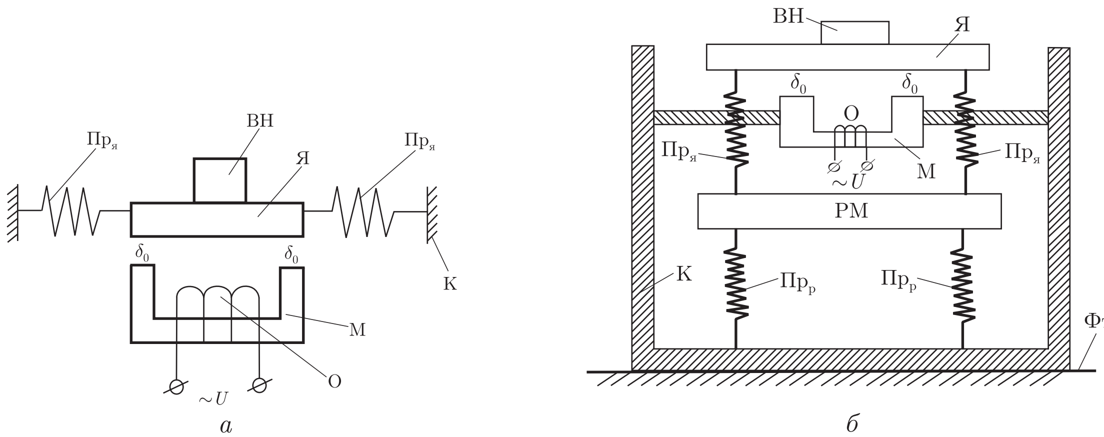

Рис. 1. Электромагнитомеханическая схема ЭМВ: *а* — без РМ; *б* — с РМ

где μ_0 — магнитная проницаемость воздуха; S — площадь поперечного сечения полюса М у зазора δ_0; w — число витков обмотки О; I_a — амплитуда тока $i(t)$ в обмотке О при приложении к ее зажимам $U(t) = U_a \sin \omega t$; ω — круговая частота; φ — угол сдвига между $U(t)$ и $i(t)$; δ — динамический воздушный зазор.

Как видно из (2), тяговое усилие $F(t)$ состоит из постоянной составляющей

$$F_0(t) = \frac{1}{8}\mu_0 S\left(\frac{I_a w}{\delta}\right)^2$$

и переменной составляющей

$$F_0(t) = \frac{1}{8}\mu_0 S\left(\frac{I_a w}{\delta}\right)^2 \cos 2(\omega t - \varphi).$$

В статике ЭМВ уравнение (1) имеет вид $c_я x_{я0} = F_0 + P_\Sigma$, откуда смещение Я совместно с ВН равно

$$x_{я0} = \frac{F_0 + P_\Sigma}{c_я} = \frac{F_0}{c_я} + \frac{P_\Sigma}{c_я} = x_{я0} + x_{я0p}, \tag{3}$$

где $x_{я0F} = F_0/c_я$ — смещение Я+ВН от действия F_0; $x_{я0p}$ — смещение Я+ВН от действия P_Σ.

Известно [2], что энергия, создающая движение Я + ВН, описывается выражением

$$W_e = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}LI_a^2 \sin^2(\omega t - \varphi) = \frac{1}{4}LI_a^2 - \frac{1}{4}LI_a^2 \cos 2(\omega t - \varphi), \tag{4}$$

где L — индуктивность обмотки О.

Из (4) видно, что здесь также имеются постоянная составляющая $W_{e0} = LI_a^2/4$ и переменная $W_{e\sim} = LI_a^2 \cos 2(\omega t - \varphi)/4$. Смещение $x_{я0F}$ обусловлено энергией W_{e0}. Поэтому можно записать

$$F_0 x_{я0F} = W_{e0} = \frac{1}{4}LI_a^2. \tag{5}$$

Так как $x_{я0F} = F_0/c_я$, то коэффициент упругости $c_{я0}$ с учетом (5) определяется из выражения

$$c_{я0} = \frac{4F_0^2}{LI_a^2}. \tag{6}$$

Подставляя в (6) значение $F_0 = (1/8)\mu_0 S(I_a w/\delta)^2$, получим

$$c_я = \frac{1}{16L}(\mu_0 S I_a)^2 \left(\frac{w}{\delta}\right)^4. \tag{7}$$

Введем в (7) значение $L = w^2 G = w^2 \mu_0 S/(2\delta)$, где G — магнитная проводимость ЭМВ. Получим

$$c_я = \frac{\mu_0 S}{8\delta}\left(\frac{I_a w}{\delta}\right)^2. \tag{8}$$

Далее осуществим связь $c_я$ с весом P_Σ. Как было отмечено в (3), $x_{я0p} = P_\Sigma/c_я$. Постоянные смещения $x_{я0F}$ и $x_{я0p}$ в своей сумме уменьшают начальный воздушный зазор δ_0. В результате для колебаний Я + ВН остается динамический зазор в виде $\delta = \delta_0 - x_{0p} - x_{0F}$, откуда

$$x_{0p} = \delta_0 - x_{0F} - \delta = \frac{P_\Sigma}{c_я}. \tag{9}$$

В свою очередь, на основании (6)

$$c_я = \frac{F_0^2}{W_{e0}}. \tag{10}$$

При приравнивании $c_я$ из (9) и (10) получаем

$$\frac{P_\Sigma}{\delta_0 - x_{0F} - \delta} = \frac{F_0^2}{W_{e0}},$$

а с учетом того, что $x_{0F} = F_0/c_я$, это выражение принимает вид

$$\frac{P_\Sigma}{\delta_0 - \frac{F_0}{c_я} - \delta} = \frac{F_0^2}{W_{e0}},$$

откуда коэффициент упругости

$$c_я = \frac{F_0^3}{F_0^2(\delta_0 - \delta) - P_\Sigma W_{e0}}. \tag{11}$$

Выражением (11) определяется коэффициент упругости $c_я$ с учетом веса P_Σ. Величина δ должна соответствовать выражению $\delta \geqslant x_{a\,\max}$, где $x_{a\,\max}$ — максимальная амплитуда колебаний якоря (Я) совместно с ВН. Величина $x_{a\,\max}$ проявляется на низких частотах в заданном частотном диапазоне воспроизводимых вибраций.

Далее рассмотрим ЭМВ с РМ. Электромагнитомеханическая схема такого ЭМВ приведена на рис. 1, *б*, где дополнительно к схеме (см. рис. 1, *а*) здесь РМ — реактивная масса; Пр$_p$ — пружины; К — корпус; Ф — фундамент.

Механическая схема ЭМВ с РМ приведена на рис. 2, где $m_я$ — масса Я + ВН$(P_я/g)$; $P_я$ — вес Я + ВН; m_p — масса; РМ(P_Σ/g); $c_я$, c_p — коэффициенты упругости; $b_я$, b_p — коэффициенты диссипации; $x_я$, x_p — перемещения якоря + ВН и РМ соответственно; $P_\Sigma = P_я + P_{ВН} + P_p$.

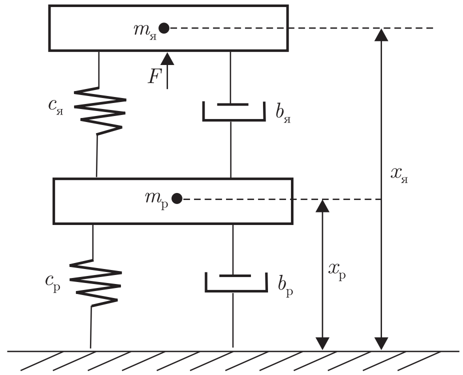

Рис. 2. Механическая схема ЭМВ с РМ

Как видно из рис. 2, механическая схема представляет собой колебательную систему с двумя степенями свободы.

Дифференциальные уравнения движения в ЭМВ следующие:

$$\left.\begin{aligned} &m_я\frac{d^2x_я}{dt^2}+b_я\frac{dx_я}{dt}+c_я x_я=F+P_я+b_я\frac{dx_p}{dt}+c_я x_p,\\ &m_p\frac{d^2x_p}{dt^2}+(b_я+b_p)\frac{dx_p}{dt}+(c_я+c_p)x_p=P_\Sigma+b_я\frac{dx_я}{dt}+c_я x_я. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Как и для ЭМВ без РМ смещение Я + ВН и здесь с РМ осуществляется под действием весов $P_я$, P_Σ и постоянной составляющей тягового усилия F_0. На основании (12) уравнения для этих смещений имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &x_{я0\Sigma}=x_{я0P}+x_{я0F}+x_{я0xp},\\ &x_{p0\Sigma}=x_{p0p}+x_{p0}x_{я0\Sigma}, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &x_{я0p}=\frac{P_я+c_я x_{p0p}}{c_я};\\ &x_{p0p}=\frac{P_\Sigma+c_я x_{я0p}}{c_я+c_p};\\ &x_{я0F}=\frac{F_0+c_я x_{p0F}}{c_я};\\ &x_{p0F}=\frac{c_я x_{я0F}}{c_я+c_p}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Из (13)

$$x_{я0p}=\frac{P_я}{c_я}+x_{p0p},\qquad x_{p0p}=\frac{P_\Sigma}{c_я+c_p}+\frac{c_я x_{я0p}}{c_я+c_p}.$$

Подставляя выражение x_{p0p} в $x_{я0p}$, получим

$$x_{я0p}=P_я\left(\frac{1}{c_я}+\frac{1}{c_p}\right)+\frac{P_\Sigma}{c_p}, \tag{14}$$

а затем

$$x_{p0p} = \frac{1}{c_я + c_p}\left\{P_\Sigma + c_я\left[P_я\left(\frac{1}{c_я} + \frac{1}{c_p}\right) + \frac{P_\Sigma}{c_p}\right]\right\}. \tag{15}$$

Выражения (14), (15) — это смещение Я+ВН и РМ от действия весов $P_я$ и $P_\Sigma = P_я + P_p$. Определим смещения $x_{я0F}$ в x_{p0F}. Из (13) эти смещения равны

$$\left.\begin{aligned} x_{я0F} &= F_0\left(\frac{1}{c_я} + \frac{1}{c_p}\right), \\ x_{p0F} &= \frac{F_0}{c_p}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Как было отмечено, энергия $W_{e0} = LI_a^2/4$ расходуется на смещения $x_{я0F}$ и x_{p0F}, т. е. в этом случае справедливо выражение

$$x_{я0F}(F_0 + c_я x_{p0F}) + x_{p0F} c_я x_{я0F} = W_{e0}. \tag{17}$$

Для определения коэффициентов $c_я$ и c_p подставим в (17) выражение (16). Получаем

$$F_0^2 - \frac{c_я + c_p}{c_p}\left(\frac{1}{c_я} + \frac{2}{c_p}\right) = W_{e0}. \tag{18}$$

Далее

$$x_{я0p} = \delta_0 - x_{я0F} - \delta$$

или, с учетом (14), (16),

$$P_я\left(\frac{1}{c_я} + \frac{1}{c_p}\right) + \frac{P_\Sigma}{c_p} = \delta_0 - \delta - F_0\left(\frac{1}{c_p} + \frac{1}{c_я}\right). \tag{19}$$

Имея в своем распоряжении выражение (18), (19), можем определить коэффициенты $c_я$ и c_p. Из выражения (19) получим

$$c_p = \frac{c_я(P_я + F_0 + P_\Sigma)}{c_я(\delta - \delta_0) - P_я - F_0}. \tag{20}$$

Из (18) имеем

$$c_{p1,2} = \frac{c_я}{2}\left(\frac{W_{e0}}{F_0^2} - 3\right) \pm \left[\frac{c_я}{4}\left(\frac{W_{e0}}{F_0^2} - 3\right)^2 - 2c_я^2\right]^{1/2}. \tag{21}$$

Для повышения надежности работы пружин примем $c_p = c_{p1}$. Тогда, приравнивая (20) и (21) для c_{p1}, получим

$$\frac{P_я + F_0 + P_\Sigma}{c_я(\delta - \delta_0) - P_я - F_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{W_{e0}}{F_0^2} - 3\right) + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{W_{e0}}{F_0^2} - 3\right)^2 - 2\right]^{1/2}. \tag{22}$$

Из (22) находим коэффициент

$$c_{я} = \frac{P_{\Sigma} + (P_{я} + F_0)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{W_{e0}}{F_0^2} - 3\right) + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{W_{e0}}{F_0^2} - 3\right)^2 - 2\right]^{1/2}\right\}}{(\delta - \delta_0)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{W_{e0}}{F_0^2} - 3\right) + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{W_{e0}}{F_0^2} - 3\right)^2 - 2\right]^{1/2}\right\}}. \tag{23}$$

Коэффициент c_p получается путем подстановки (23) в (20). Для упрощения записи обозначим выражение в фигурных скобках $\{\ldots\} = Q$. Тогда коэффициент упругости

$$c_p = \frac{(P_{я} + F_0 + P_{\Sigma})[P_{\Sigma} + (P_{я} + F_0)Q]}{(\delta - \delta_0)Q - P_{я} - F_0 + (\delta - \delta_0)[P_{\Sigma} + (P_{я} + F_0)Q]}(\delta - \delta_0)Q.$$

Еще раз заметим, что $\delta_0 - \delta$ должен быть больше амплитуды колебаний якоря $x_{aя}$, примем $\delta_0 - \delta \geqslant kx_{aя\,\max}$, где $k = 1{,}5 \div 2$. Причем [3]

$$x_{aя} = \frac{|F(t_n) + b_{я}\dot{x}_p + c_{я}x_p|}{m_{я}\sqrt{(4\omega^2 - \omega_{0я}^2)^2 + \left(\frac{2b_{я}}{m_{я}}\omega\right)^2}},$$

$$x_{ap} = \frac{|b_{я}\dot{x}_{я} + c_{я}x_{я}|}{m_p\sqrt{(4\omega^2 - \omega_{0p}^2) + \left[\frac{(b_{я} + b_p)2\omega}{m_p}\right]^2}},$$

где $\omega_{0я}$, ω_{0p} — частоты свободных колебаний якоря и РМ соответственно (см. эти частоты для КС с двумя степенями свободы [3]).

Таким образом, на основе энергетического метода получены аналитические выражения коэффициентов упругости в ЭМВ без РМ и с РМ. Использование полученных формул способствует более точному проектированию ЭМВ.

1. *Вибрации* в технике. В 6-ти т. / Под ред. Э. Э. Лавендела. – Москва: Машиностроение, 1981. – Т. 4. – 510 с.
2. *Гордон А. З., Сливинская А. Г.* Электромагнитные вибраторы переменного тока. – Москва: Энергия, 1968. – 200 с.
3. *Божко А. Е., Голуб Н. М.* Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 07.02.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko, K. B. Myagkohleb**

The energy method for definition of elasticity coefficients in electromagnetical vibroexciters

We present the formulas for the elasticity coefficients of springs in electromagnetic vibroexciters.