УДК 539.375

А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, Т. В. Полищук

О модели пластической зоны предразрушения в угловой точке границы раздела сред

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

Розглянуто симетричну задачу про розрахунок пластичної зони передруйнування в кутовій точці межі поділу двох ізотропних середовищ. Зона передруйнування моделюється лініями розриву дотичного зміщення, розташованими на цій межі. Точне розв'язання відповідної задачі теорії пружності побудовано методом Вінера–Хопфа.

За последние десятилетия по механике разрушения было опубликовано большое число работ, посвященных плоским задачам о расчетах зон предразрушения вблизи концов трещин в кусочно-однородных телах при условии, что эти зоны моделируются линиями разрыва смещения [1–7]. Значительный интерес для механики разрушения композитных материалов представляет осуществление расчетов зон предразрушения в рамках моделей с линиями разрыва смещения вблизи других угловых точек кусочно-однородных тел, которые являются остроконечными концентраторами напряжений. В данной работе рассматривается такая задача для угловой точки границы раздела сред.

В условиях плоской деформации в рамках симметричной задачи рассмотрим кусочно-однородное изотропное тело с границей раздела сред в форме сторон угла, которое составлено из различных упругих частей, соединенных между собой тонким связующим слоем. Материал связующего слоя предполагается упругопластическим.

С ростом внешней нагрузки вблизи угловой точки границы раздела сред, представляющей собой остроконечный концентратор напряжений, появляется и развивается пластическая зона предразрушения в виде пары узких полос, исходящих из данной точки и расположенных на этой границе. Будем изучать лишь начальную стадию развития пластической зоны предразрушения, считая внешнюю нагрузку достаточно малой. Тогда размер зоны будет значительно меньше размеров тела.

Ставится задача определения длины пластической зоны предразрушения.

Поскольку связующий материал является упругопластическим, преимущественные деформации в зоне предразрушения развиваются по механизму сдвига. Поэтому полоску-зону будем моделировать линией разрыва касательного смещения, на которой касательное напряжение равно заданной постоянной связующего материала τ.

Таким образом, с учетом малости пластической зоны предразрушения с целью определения ее длины приходим к плоской статической симметричной задаче теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей разрезы конечной длины, исходящие из угловой точки и расположенные на этой границе. На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи без разрезов (задача К), порождаемое единственным на интервале $]-1;0]$ корнем ее характеристического уравнения. Произвольная постоянная C, входящая в указанное решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения внешней задачи.

Задача К решается методом разделения переменных [8, 9]. В частности, для напряжения $\tau_{r\theta}(r,0)$ в этой задаче имеет место выражение

$$\tau_{r\theta}(r,0) = Cgr^{\lambda}, g = \lambda g_1 \sin\lambda\alpha - g_2 \sin(\lambda+2)\alpha,$$

$$\begin{aligned}
g_1 = {} & (1-e)\lambda^2 \sin^2 2\alpha \cos(\lambda+2)\alpha - \\
& - (1-\varkappa_1-2e)\lambda \sin 2\alpha \cos(\lambda+2)\alpha \cos\lambda(\pi-\alpha)\sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + \\
& + [2-(1-\varkappa_2)e]\lambda \sin 2\alpha \cos\lambda\alpha \sin(\lambda+2)\alpha \cos(\lambda+2)\alpha - \\
& - 2[1-\varkappa_1-(1-\varkappa_2)e]\cos\lambda\alpha \sin(\lambda+2)\alpha \cos(\lambda+2)\alpha \cos\lambda(\pi-\alpha)\sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + \\
& + (1+\varkappa_1)\lambda \sin 2\alpha \sin(\lambda+2)\alpha \cos\lambda(\pi-\alpha)\cos[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + \\
& + (1+\varkappa_1)(1-\varkappa_2)\cos\lambda\alpha \sin^2(\lambda+2)\alpha \cos\lambda(\pi-\alpha)\cos[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] - \\
& - (1+\varkappa_2)\lambda \sin 2\alpha \cos\lambda\alpha \sin(\lambda+2)\alpha \cos(\lambda+2)\alpha + \\
& + (1-\varkappa_1)(1+\varkappa_2)\cos\lambda\alpha \sin(\lambda+2)\alpha \cos(\lambda+2)\alpha \cos\lambda(\pi-\alpha)\sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2 = {} & (1-e)(1-\varkappa_2+\lambda)\lambda^2 \sin^2 2\alpha \cos\lambda\alpha - \\
& - (1-\varkappa_1-2e)\lambda(1-\varkappa_2+\lambda)\sin 2\alpha \cos\lambda\alpha \cos\lambda(\pi-\alpha)\sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + \\
& + [2-(1-\varkappa_2)e]\lambda(1-\varkappa_2+\lambda)\sin 2\alpha \cos^2\lambda\alpha \sin(\lambda+2)\alpha - \\
& - 2[1-\varkappa_1-(1-\varkappa_2)e](1-\varkappa_2+\lambda)\cos^2\lambda\alpha \sin(\lambda+2)\alpha \cos\lambda(\pi-\alpha)\sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + \\
& + (1+\varkappa_1)\lambda^2 \sin 2\alpha \sin\lambda\alpha \cos\lambda(\pi-\alpha)\cos[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] + \\
& + (1+\varkappa_1)(1-\varkappa_2)\lambda \sin\lambda\alpha \cos\lambda\alpha \sin(\lambda+2)\alpha \cos\lambda(\pi-\alpha)\cos[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha] - \\
& - (1+\varkappa_2)\lambda^2 \sin 2\alpha \sin\lambda\alpha \cos\lambda\alpha \cos(\lambda+2)\alpha + \\
& + (1-\varkappa_1)(1+\varkappa_2)\lambda \sin\lambda\alpha \cos\lambda\alpha \cos(\lambda+2)\alpha \cos\lambda(\pi-\alpha)\sin[\lambda(\pi-\alpha)-2\alpha],
\end{aligned}$$

$$e = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}e_0, \qquad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \qquad \varkappa_{1,2} = 3-4\nu_{1,2}.$$

Здесь $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \pi-\alpha$; E_1,E_2 — модули Юнга; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона; клину с углом раствора 2α соответствуют упругие постоянные E_2, ν_2; λ — единственный на интервале $]-1;0[$ корень характеристического уравнения задачи К

$$\Delta(-x-1) = 0, \Delta(z) = b_0(z) + b_1(z)e + b_2(z)e^2,$$

$$b_0(z) = (\sin 2z\alpha + z\sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2z(\pi-\alpha) + z\sin 2\alpha],$$

$$\begin{aligned}
b_1(z) = {} & (1+\varkappa_1)(1+\varkappa_2)\sin^2 z\pi - (\sin 2z\alpha + z\sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2z(\pi-\alpha) + z\sin 2\alpha] - \\
& - [\sin 2z(\pi-\alpha) - z\sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2z\alpha - z\sin 2\alpha),
\end{aligned}$$

$$b_2(z) = [\sin 2z(\pi-\alpha) - z\sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2z\alpha - z\sin 2\alpha).$$

Граничные условия рассматриваемой задачи о разрезах имеют следующий вид:

$$\theta = \pi-\alpha, \qquad \tau_{r\theta} = 0, \qquad u_\theta = 0; \qquad \theta = -\alpha, \qquad \tau_{r\theta} = 0, \qquad u_\theta = 0; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\theta = 0, \qquad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \qquad \langle u_\theta \rangle = 0; \\ &\theta = 0, \qquad r < l, \qquad \tau_{r\theta} = \tau_1; \qquad \theta = 0, \qquad r > l, \qquad \langle u_r \rangle = 0; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\theta = 0, \qquad r \to \infty, \qquad \tau_{r\theta} = Cgr^\lambda + o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{3}$$

Здесь $\langle a \rangle$ — скачок a; $\tau_1 = \tau$, если $Cg > 0$; $\tau_1 = -\tau$, если $Cg < 0$.

Решение сформулированной задачи теории упругости представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо первого условия (2) имеем

$$\theta = 0, \qquad r < l, \qquad \tau_{r\theta} = \tau_1 - Cgr^\lambda, \tag{4}$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача — задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

Для построения точного решения первой задачи используется метод Винера–Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [10, 11].

Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1) и учитывая второе условие (2) и условие (4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера–Хопфа:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1} = A(\operatorname{ctg} p\pi) G(p) \Phi^-(p), \tag{5}$$

$$A = \frac{(1+\varkappa_1)[1+\varkappa_1+(1+\varkappa_2)e]}{2[\varkappa_1+(1+\varkappa_1\varkappa_2)e+\varkappa_2 e^2]}, \qquad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)},$$

$$G_1(p) = [\varkappa_1 + (1+\varkappa_1\varkappa_2)e + \varkappa_2 e^2][a_0(p) + a_1(p)e] \sin p\pi,$$

$$G_2(p) = [1+\varkappa_1+(1+\varkappa_2)e][b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2] \cos p\pi,$$

$$a_0(p) = (1+\varkappa_1)[\cos 2p(\pi-\alpha) - \cos 2\alpha](\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha),$$

$$a_1(p) = (1+\varkappa_2)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi-\alpha) - p\sin 2\alpha],$$

$$b_0(p) = (\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2p(\pi-\alpha) + p\sin 2\alpha],$$

$$\begin{aligned} b_1(p) = {} & (1+\varkappa_1)(1+\varkappa_2)\sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2p(\pi-\alpha) + p\sin 2\alpha] - \\ & -[\sin 2p(\pi-\alpha) - p\sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha), \end{aligned}$$

$$b_2(p) = [\sin 2p(\pi-\alpha) - p\sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p\sin 2\alpha), \qquad \tau_2 = -Cgl^\lambda,$$

$$\Phi^+(p) = \int\limits_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0)\rho^p d\rho, \qquad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int\limits_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Bigg|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=0}} \rho^p d\rho.$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ — достаточно малые положительные числа.

Функция $G(it)(-\infty < t < \infty)$ представляет собой действительную положительную четную функцию t, стремящуюся к единице при $t \to \infty$. Следовательно, индекс функции $G(p)$

по мнимой оси равен нулю и имеет место факторизация [12]

$$G(p)=\frac{G^+(p)}{G^-(p)} \qquad (\operatorname{Re}p=0), \qquad \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re}p<0,\\ G^-(p), & \operatorname{Re}p>0.\end{cases} \tag{6}$$

Функцию $p\operatorname{ctg}p\pi$ можно факторизовать так:

$$p\operatorname{ctg}p\pi=K^+(p)K^-(p), \qquad K^{\pm}(p)=\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(1/2\mp p)} \tag{7}$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция). С помощью факторизаций (6), (7) уравнение (5) перепишем в виде

$$\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)}+\frac{\tau_1}{(p+1)K^+(p)G^+(p)}+\frac{\tau_2}{(p+\lambda+1)K^+(p)G^+(p)}=$$
$$=\frac{AK^-(p)\Phi^-(p)}{pG^-(p)} \qquad (\operatorname{Re}p=0). \tag{8}$$

Справедливы представления

$$\begin{gathered}\frac{\tau_1}{(p+1)K^+(p)G^+(p)}=\frac{\tau_1}{p+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}-\frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)}\right]+\\ +\frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)},\\ \frac{\tau_2}{(p+\lambda+1)K^+(p)G^+(p)}=\frac{\tau_2}{p+\lambda+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}-\frac{1}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\right]+\\ +\frac{\tau_2}{(p+\lambda+1)K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)} \qquad (\operatorname{Re}p=0).\end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получаем

$$\begin{gathered}\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)}+\frac{\tau_1}{p+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}-\frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)}\right]+\\ +\frac{\tau_2}{p+\lambda+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}-\frac{1}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\right]=\\ =\frac{AK^-(p)\Phi^-(p)}{pG^-(p)}-\frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)}-\frac{\tau_2}{(p+\lambda+1)K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\\ (\operatorname{Re}p=0).\end{gathered} \tag{10}$$

Функция в левой части (10) аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}p<0$, а функция в правой части (10) аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}p>0$. В силу принципа аналитического продолжения эти функции равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p.

Вблизи конца разреза в силу общих положений о поведении напряжений в окрестностях угловых точек упругих тел [8, 9] реализуется асимптотика, представляющая собой решение однородной статической задачи теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости, содержащей на прямолинейной границе раздела сред полубесконечную линию разрыва касательного смещения, порождаемое корнем $-1/2$ ее характеристического уравнения. В частности, имеют место асимптотики

$$\begin{aligned} &\theta = 0, \qquad r \to l + 0, \qquad \tau_{r\theta} \sim \frac{\varkappa_1 + e + 1 + \varkappa_2 e}{2(1 + \varkappa_2 e)} \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(r - l)}}, \\ &\theta = 0, \qquad r \to l - 0, \qquad \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} \frac{\varkappa_1 + e}{1 + \varkappa_1} \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(l - r)}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь k_{II} — коэффициент интенсивности напряжений в конце разреза, подлежащий определению.

Исходя из (11), по теореме абелева типа получаем

$$p \to \infty, \qquad \Phi^+(p) \sim \frac{\varkappa_1 + e + 1 + \varkappa_2 e}{2(1 + \varkappa_2 e)} \frac{k_{II}}{\sqrt{-2pl}}, \qquad \Phi^-(p) \sim -\frac{\varkappa_1 + e}{1 + \varkappa_1} \frac{k_{II}}{\sqrt{2pl}}. \tag{12}$$

Из (6), (7), (12) следует, что функции в левой и правой частях (10) стремятся к нулю при $p \to \infty$ в полуплоскостях $\mathrm{Re}\, p < 0$ и $\mathrm{Re}\, p > 0$ соответственно. В силу теоремы Лиувилля единая аналитическая функция тождественно равна нулю во всей плоскости p.

Таким образом, решение уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned} &\Phi^+(p) = K^+(p) G^+(p) \left\{ \frac{\tau_1}{p + 1} \left[\frac{1}{K^+(-1) G^+(-1)} - \frac{1}{K^+(p) G^+(p)} \right] + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\tau_2}{p + \lambda + 1} \left[\frac{1}{K^+(-\lambda - 1) G^+(-\lambda - 1)} - \frac{1}{K^+(p) G^+(p)} \right] \right\} \qquad (\mathrm{Re}\, p < 0), \\ &\Phi^-(p) = \frac{p G^-(p)}{A K^-(p)} \left[\frac{\tau_1}{(p + 1) K^+(-1) G^+(-1)} + \frac{\tau_2}{(p + \lambda + 1) K^+(-\lambda - 1) G^+(-\lambda - 1)} \right] \\ &(\mathrm{Re}\, p > 0). \end{aligned} \tag{13}$$

Используя (13), можно получить выражения для меллиновских трансформант напряжений. В результате применения к этим выражениям формулы обращения Меллина определяются напряжения.

С помощью (13) находим асимптотику

$$p \to \infty, \qquad \Phi^-(p) \sim \frac{1}{A\sqrt{p}} \left[\frac{\tau_1}{K^+(-1) G^+(-1)} + \frac{\tau_2}{K^+(-\lambda - 1) G^+(-\lambda - 1)} \right]. \tag{14}$$

Согласно (12), (14), получаем формулу для коэффициента интенсивности напряжений в конце разреза

$$k_{II} = \frac{2\sqrt{2(1 + \varkappa_2 l)}}{1 + \varkappa_1 + (1 + \varkappa_2) e} \sqrt{l} \left[\frac{g \Gamma(\lambda + 3/2)}{\Gamma(\lambda + 2) G^+(-\lambda - 1)} C l^\lambda - \frac{\sqrt{\pi}}{2 G^+(-1)} \tau_1 \right]. \tag{15}$$

Длина пластической зоны предразрушения определяется из условия ограниченности напряжений вблизи конца линий разрыва касательного смещения, т. е. из условия равенства нулю коэффициента k_{II}.

Приравнивая к нулю правую часть (15), получаем следующую формулу, служащую для определения длины $2l$ пластической зоны предразрушения:

$$l = L \left(\frac{|C|}{\tau} \right)^{-1/\lambda}, \qquad L = \left[\frac{2|\mathrm{g}| \Gamma(\lambda + 3/2) G^+(-1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + 2) G^+(-\lambda - 1)} \right]^{-1/\lambda}.$$

1. *Дундурс Дж., Комниноу М.* Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композит. материалов. – 1979. – № 3. – С. 387–396.
2. *Симонов И. В.* Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений // Там же. – 1985. – № 6. – С. 969–976.
3. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А.* О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 1. – С. 63–68.
4. *Лобода В. В., Шевелева А. Е.* Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Там же. – 2003. – **39**, № 5. – С. 76–82.
5. *Бакиров В. Ф., Гольдштейн Р. В.* Модель Леонова–Панасюка–Дагдейла для трещины на границе соединения материалов // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, № 1. – С. 170–179.
6. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 2. – С. 14–23.
7. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* О начальном развитии зоны предразрушения вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред // Там же. – 2004. – **40**, № 2. – С. 74–81.
8. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
9. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
10. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
11. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
12. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев
Уманский государственный педагогический
университет им. Павла Тычины

Поступило в редакцию 19.05.2008

A. A. Kaminsky, L. A. Kipnis, T. V. Polischuk

On the plastic prefracture zone model at the corner point of the interface of media

The symmetric problem on the calculation of a plastic prefracture zone at the corner point of the interface of two isotropic media is considered. The prefracture zone is modeled by lines of rupture of the tangential displacement located on the interface. An exact solution of the corresponding problem of the theory of elasticity is constructed by the Wiener–Hopf method.