ОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2009

НАУКИ ПРО ЗЕМЛЮ

УДК 530.3+550.344

Є. М. Бицань

Поширення плоских сейсмічних хвиль у п'ятиелементних реологічних тілах

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

Розглянуто динамічну задачу теорії пружності для п'ятиелементних реологічних тіл. Одержано реологічні рівняння та дисперсійні аналітичні вирази для визначення фазових швидкостей і коефіцієнтів загасання пружних хвиль та характеристичні рівняння для часів релаксації і післядії.

Коливальні процеси в фізичних середовищах є згасаючими внаслідок непружності останніх. Непружність проявляється насамперед у перетворенні частини механічної енергії в теплову і враховується за допомогою різних математичних моделей не зовсім пружних деформованих середовищ [1], які включають в розрахункову модель поряд з пружними елементами в'язкі і пластичні. В геофізиці найчастіше використовують реологічні тіла (РТ), які складаються з двох, трьох або чотирьох елементів [2].

У повідомленні розглянуто п'ятиелементні РТ, які складаються з двох пружних і трьох в'язких або з двох в'язких і трьох пружних елементів, з'єднаних між собою за допомогою двох паралельних і двох послідовних зв'язків. РТ з іншими параметрами будуть виродженими, тобто вони будуть еквівалентні РТ з меншим числом елементів. РТ з першої групи будемо називати квазів'язкими (КВРТ) на відміну від РТ з другої групи, які назвемо квазіпружними (КПРТ).

П'ятиелементні РТ утворюються за допомогою невироджених об'єднань дво- і триелементних РТ або приєднанням до чотириелементного РТ одиночного елемента. Невиродженим об'єднанням двох РТ назвемо таким, що виконуються з дотриманням умови балансу:

$$\delta_e + \delta_c = 1, \tag{1}$$

де $\delta_e = |n_N - n_H|$ — різниця між кількістю пружних та в'язких елементів, а n_H і n_N — число пружних і в'язких елементів; $\delta_c = |n_I - n_-|$ — різниця між кількістю паралельних та послідовних включень, а n_I і n_- — число паралельних і послідовних приєднань у РТ відповідно.

Реологічне рівняння (РР) довільного п'ятиелементного КПРТ записується в узагальненому вигляді (в стандартній формі) таким чином:

$$\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = E_H(\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon}), \tag{2}$$

де коефіцієнти a_i і b_i — додатні константи, що виражаються через в'язкопружні параметри РТ; σ — напруження, ε — деформація; E_H — пружна константа (релаксуючий пружний модуль), за К. Зінером (1954), крапкою позначено диференціювання за часом.

Рівняння (2) можна також записати через релаксуючі характеристики РТ:

$$\sigma + (\tau_1 + \tau_2)\dot{\sigma} + \tau_1\tau_2\ddot{\sigma} = E_H(\varepsilon + (\nu_1 + \nu_2)\dot{\varepsilon} + \nu_1\nu_2\ddot{\varepsilon}). \tag{3}$$

Тут τ_1 і τ_2 — часи релаксації напружень при постійній деформації (часи релаксації — ЧР); ν_1 і ν_2 — часи релаксації деформації при постійній напрузі (часи післядії або повзучості — ЧП). Згідно з К. Зінером (1954), назвемо РТ, що описується рівнянням (3), стандартним квазіпружним п'ятиелементним РТ.

Рівняння руху в переміщеннях динамічної задачі теорії пружності для п'ятиелементного КПРТ можна навести, за Г. Кольським (1955), такі:

$$\ddot{u} + a_1\dddot{u} + a_2\ddddot{u} = \frac{E_H(u'' + b_1\dot{u}'' + b_2\ddot{u}'')}{\rho}, \tag{4}$$

де ρ — питома щільність, а штрихом позначене диференціювання по координаті x.

Частковий розв'язок рівняння (4) шукаємо, за А. Тихоновим (1966), у формі:

$$u = u_1(x)u_2(t). \tag{5}$$

Підставляємо шукану функцію u у формі (5) у рівняння руху в переміщеннях (4), і після розділення змінних отримуємо:

$$\frac{\ddot{u}_2 + a_1\dddot{u}_2 + a_2\ddddot{u}_2}{u_2 + b_1\dot{u}_2 + b_2\ddot{u}_2} = \frac{E_H u_1''}{\rho u_1} = -\omega_0,$$

де ω_0 — константа розділення.

Рівняння дає два одновимірних рівняння для розшукуваних функцій:

$$\begin{aligned} &u_1'' + k^2 u_1 = 0, \\ &\ddddot{u}_2 + \frac{a_1}{a_2}\dddot{u}_2 + \frac{1 + b_2\omega_0}{a_2}\ddot{u}_2 + \frac{b_1}{a_2}\dot{u}_2 + \frac{\omega_0}{a_2}u_2 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

(тут $k = \omega/c_1$ — хвильове число; $c_1 = \sqrt{E_H/\rho}$ — фазова швидкість плоскої поздовжньої сейсмічної хвилі).

Розв'язок першого рівняння системи (6) знаходимо у вигляді

$$u_1 = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx = A_0 \sin k(x - \varphi_0), \tag{7}$$

де $A_0 = \sqrt{u_0^2 + (u_0''/k)^2}$; $\varphi_0 = -\operatorname{arctg}(ku_0/u_0')$ — початкова фаза, $u_0 = u(0)$, $u_0' = u'(0)$.

Частковий розв'язок другого рівняння системи (6) будемо шукати, за А. Тихоновим (1966), у такій формі:

$$u_2^{(i)} = B_i e^{\lambda_i t}. \tag{8}$$

Характеристичне рівняння для визначення параметрів λ_i запишеться у такий спосіб:

$$\lambda^4 + \frac{a_1}{a_2}\lambda^3 + \frac{1+b_2\omega_0}{a_2}\lambda^2 + \frac{b_2\omega_0}{a_2}\lambda + \frac{\omega_0}{a_2} = 0.$$

Частковий розв'язок рівняння (3) можна також брати, за С. Коган (1966), у вигляді

$$u = u_0 e^{i(kx-\omega t)}, \tag{9}$$

де u_0 — стала інтегрування; ω — кругова частота: $i=\sqrt{-1}$; $k=\omega/c+i\alpha$ — хвильове число, c — фазова швидкість, а α — коефіцієнт загасання плоскої поздовжньої сейсмічної хвилі, що біжить.

Підставляємо u в формі (9) у рівняння руху в переміщеннях (4) і отримаємо такий вираз для хвильового числа k [3]:

$$k_H^2 = \frac{\omega^2\rho}{E_H}\frac{-1+a_2\omega^2+ia_1\omega}{-1+b_2\omega^2+ib_1\omega} = \frac{\omega^2}{c_{0H}^2}, \tag{10}$$

де $c_{0H}^2 = E_0^H/\rho$, $E_0^H = \widehat{E}^H(1-i\beta)$ — комплексний, а $\widehat{E}^H$ — динамічний модуль, β^H — фазова характеристика комплексного модуля, яка для геологічних середовищ набагато менша за одиницю. Її називають внутрішнім тертям або кутом втрат.

Знак у показнику степеня при часовій координаті беремо таким, щоб виконувалась необхідна і достатня умова причинності — у нижній напівплощині хвильове число k не повинно мати особливості.

Формулу (10) за допомогою рівняння (3) можна записати таким чином:

$$k_H^2 = \frac{\omega^2\rho}{E_H}\frac{\tau_1\tau_2\left(\omega+\dfrac{i}{\tau_1}\right)\left(\omega+\dfrac{i}{\tau_2}\right)}{\nu_1\nu_2\left(\omega+\dfrac{i}{\nu_1}\right)\left(\omega+\dfrac{i}{\nu_2}\right)}, \tag{11}$$

звідки випливає, що комплексне хвильове число k не матиме коренів у нижній напівплощині ω у випадку, коли в показнику степеня при часовій координаті братимемо знак мінус.

Наведемо формули для внутрішнього тертя та комлексного і динамічного модулів:

$$\begin{gathered} E_0^H = \frac{E_H(-1+b_2\omega^2+i\omega b_3)}{-1+a_2\omega^2+i\omega a_1} = \widehat{E}^H(1-i\beta_H), \\ \widehat{E}^H = \mathrm{Re}(E_0^H) = E_H\frac{1+\omega^2(a_1b_1-a_2-b_2)+\omega^4a_2b_2}{a_1^2\omega^2+(1-\omega^2a_2)^2}, \\ \beta_H = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(E_0^H)}{\mathrm{Re}(E_0^H)}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega(a_1(-1+\omega^2b_2)+b_1(1-\omega^2a_2))}{1+\omega^2(a_1b_1-a_2-b_2)+\omega^4a_2b_2}\right). \end{gathered} \tag{12}$$

Покажемо, що динамічний модуль і внутрішнє тертя додатні. В формулі для динамічного модуля в системі (12) тільки складова при ω^2 у чисельнику має величини з різними знаками. Використовуючи стандартну форму РР (3), отримаємо:

$$a_1 b_1 - a_2 - b_2 = \tau_1(\nu_2 - \tau_2) + \tau_2(\nu_1 + \nu_2) + \nu_1(\tau_1 - \nu_2). \tag{13}$$

У роботі [5] показано, що для п'ятиелементних КПРТ має місце таке співвідношення між часами релаксації та часами післядії:

$$\nu_1 > \tau_1 > \nu_2 > \tau_2, \tag{14}$$

так що розглянутий вище вираз (13) буде додатним, а тому буде додатним і динамічний модуль $\widehat{E}^H$. Аналогічно доведемо, що внутрішнє тертя додатне. Для цього перегрупуємо чисельник у виразі для β_H:

$$\omega(a_1(-1 + \omega^2 b_2) + b_1(1 - \omega^2 a_2)) = \omega[(\nu_1 - \tau_1)(1 + \omega^2\tau_2\nu_2) + (\nu_2 - \tau_2)(1 + \omega^2\tau_1\nu_1)].$$

З умови (14) випливає, що цей вираз додатний.

Проаналізуємо далі поведінку п'ятиелементного КПРТ у стандартних випадках.

1. Коли в тілі підтримується постійне напруження $\sigma = \sigma_0$, то має місце повзучість. Деформація ε описується в цьому випадку таким виразом:

$$\varepsilon = \frac{\nu_1(\varepsilon_0 - \widehat{\varepsilon} + \nu_2\dot{\varepsilon}_0)}{\nu_1 - \nu_2} e^{-t/\nu_1} + \frac{\nu_2(\varepsilon_0 - \widehat{\varepsilon} + \nu_1\dot{\varepsilon}_0)}{\nu_2 - \nu_1} e^{-t/\nu_2} + \frac{\sigma_0}{E_H},$$

де $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$, $\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}(0)$, $\widehat{\varepsilon} = \sigma_0/E_H$ — частковий розв'язок рівняння $Q(\varepsilon) = \sigma_0/E_H$, а часи релаксації деформації при постійному навантаженні ν_i визначаються за допомогою характеристичного рівняння $\nu^2 - b_1\nu + b_2 = 0$ (тут b_1 і b_2 — коефіцієнти РР (2)).

Якщо в момент $t = t_1$ зняти навантаження, то в тілі буде відбуватися післядія [3]. Деформація в цьому випадку запишеться в такий спосіб:

$$\varepsilon = \frac{\tau_1(\tau_2\dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1)}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t'/\tau_1} + \frac{\tau_2(\tau_1\dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1)}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t'/\tau_2},$$

де $t' = t - t_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$, $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}(t_1)$ і буде змінюватися від ε_1 при $t = t_1$ до 0 при $t = \infty$.

2. У випадку, коли в тілі підтримується постійна деформація $\varepsilon = \varepsilon_0$, для напруження σ має місце запис

$$\sigma = \frac{\tau_1(\sigma_0 - \widehat{\sigma} + \tau_2\dot{\sigma}_0)}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2(\sigma_0 - \widehat{\sigma} + \tau_1\dot{\sigma}_0)}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2} + \widehat{\sigma}, \tag{15}$$

де $\sigma_0 = \sigma(0)$, $\dot{\sigma}_0 = \dot{\sigma}(0)$, а $\widehat{\sigma} = \varepsilon_0 E_H$ — частковий розв'язок рівняння $P(\sigma) = \varepsilon_0 E_H$, а часи релаксації напружень при постійній деформації будуть визначатись із такого рівняння:

$$\nu^2 - a_1\nu + a_2 = 0$$

(тут a_i — коефіцієнти РР (2)). З рівняння (15) випливає, що напруження буде релаксувати від σ_0 при $t = 0$ до $\widehat{\sigma}$ при $t = \infty$.

3. Якщо ж до РТ прикладається гармонічне напруження $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$, то деформацію будемо визначати за формулою $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)}$, а зсув фаз між напруженням і деформацією — за формулою:

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{b_1 - a_1 - \omega^2(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{1 + \omega^2(a_1 b_1 - a_2 - b_2) + \omega^4 a_2 b_2}. \tag{16}$$

З рівняння (14) випливає, що чисельник і знаменник у (16) додатні, так що деформація в розглянутому випадку запізнюватиметься від напруження на кут δ.

Далі розглянемо квазів'язкий варіант п'ятиелементного РТ (КВРТ). Його РР записується в формі

$$\sigma + c_1\dot{\sigma} + c_2\ddot{\sigma} = \eta_N(\dot{\varepsilon} + d_1\ddot{\varepsilon} + d_2\varepsilon), \tag{17}$$

де η_N — в'язкий релаксуючий модуль; c_i і d_i — додатні величини, які виражаються через пружні і в'язкі параметри РТ.

Рівняння (17) можна записати в стандартній формі таким чином:

$$\sigma + (\tau_1 + \tau_2)\dot{\sigma} + \tau_1\tau_2\ddot{\sigma} = \eta_N(\dot{\varepsilon} + (\nu_1 + \nu_2)\ddot{\varepsilon} + \nu_1\nu_2\dddot{\varepsilon}), \tag{18}$$

де, як і раніше, τ_i — часи релаксації напружень при постійній деформації, а ν_i — часи релаксації деформації при постійному напруженні.

Рівняння руху в переміщеннях п'ятиелементного КВРТ набуде такого вигляду:

$$\ddot{u} + c_1\dddot{u} + c_2\ddddot{u} = \frac{\eta_N(\dot{u}'' + d_1\ddot{u}'' + d_2\dddot{u}'')}{\rho}, \tag{19}$$

частковий розв'язок якого шукаємо, як і в попередньому випадку, в формі (4).

Після розділення змінних отримаємо:

$$\frac{\ddot{u}_2 + c_1\dddot{u}_2 + \ddddot{c}_2}{\dot{u}_2 + b_1\ddot{u}_2 + b_2\dddot{u}_2} = \frac{\eta_N u_1''}{\rho u_1} = -\omega_0, \tag{20}$$

де ω_0 — константа розділення змінних.

Рівняння (20) дає два одновимірні рівняння для розшукуваних функцій u_1 і u_2. Розв'язок першого з них беремо в формі (7), а для часткового розв'язку другого, яке візьмемо в формі (8), маємо таке характеристичне рівняння:

$$\lambda\left(\lambda^3 + \frac{c_1 + \omega_0 d_2}{d_2}\lambda^2 + \frac{1 + d_1\omega_0}{d_3}\lambda + \frac{\omega_0}{d_3}\right) = 0.$$

У випадку, коли частковий розв'язок береться в формі (9), для хвильового числа має місце такий запис:

$$k_N^2 = \frac{\omega\rho}{\eta_N}\frac{-1 + c_2\omega^2 - i\omega c_1}{\omega d_1 + i(1 - d_2\omega^2)} = \frac{\omega^2}{c_{0N}^2}, \tag{21}$$

а для внутрішнього тертя та комплексного і динамічного модулів вирази набувають такого вигляду:

$$
\begin{aligned}
&E_0^N = \frac{\omega\eta_N(\omega d_1 + i(1-d_2\omega^2))}{-1+\omega^2 c_2 - i\omega c_1} = \widehat{E}^N(1-i\beta_N),\\
&\widehat{E}^N = Re(E_0^N) = \omega^2\eta_N\frac{d_1(-1+\omega^2 c_2)+c_1(1-\omega^2 d_2)}{(-1+\omega^2 c_2)^2+\omega^2 c_1^2},\\
&\beta_N = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(E_0^N)}{\operatorname{Re}(E_0^N)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\omega^2(c_1d_1-c_2-d_2)+\omega^4 c_2 d_2}{\omega(c_1-d_1+\omega^2(c_2d_1-c_1d_2))}\right).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Покажемо, що динамічний модуль і внутрішнє тертя додатні величини. Розпишемо детальніше чисельник у виразі для динамічного модулю в (22), використовуючи співвідношення (18).

$$c_1 - d_1 + \omega^2(d_1c_2 - d_2c_1) = \tau_1 - \nu_1 + \tau_2 - \nu_2 + \omega^2(\tau_1\nu_1(\tau_2-\nu_2) + \tau_2\nu_2(\tau_1-\nu_1)).$$

Враховуючи, що для п'ятиелементних КВРТ, згідно з [5], має місце таке співвідношення між часами релаксації та часами післядії:

$$\tau_1 > \nu_1 > \tau_2 > \nu_2 > 0, \tag{23}$$

розглянутий вище вираз буде додатним, так що буде додатним і динамічний модуль $\widehat{E}^H$.

Аналогічно переконаємось, що і внутрішнє тертя буде додатним. Для цього досить показати, що складова при ω^2 в чисельнику для β_H у (22) додатна. Випишемо цей вираз:

$$c_1d_1 - c_2 - d_2 = (\tau_1+\tau_2)(\nu_1+\nu_2) - \tau_1\tau_2 - \nu_1\nu_2 = \nu_2(\tau_1+\tau_2) + \tau_1(\nu_1-\tau_2) + \nu_1(\tau_2-\nu_2).$$

Кожен вираз в дужках, згідно з умовою (23), додатний, а тому буде додатною і складова при ω^2 в формулі для внутрішнього тертя в (22).

Далі розглянемо поведінку п'ятиелементного КВРТ у стандартних випадках.

1) під дією постійного напруження $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ деформація ε буде визначатися за допомогою такого співвідношення:

$$\varepsilon = \frac{\nu_1^2(\ddot{\varepsilon}_0\nu_2 - \widehat{\dot{\varepsilon}}_0 + \dot{\varepsilon}_0)}{\nu_2-\nu_1}(1+e^{-t/\nu_1}) - \frac{\nu_2^2(\ddot{\varepsilon}_0\nu_1 - \widehat{\dot{\varepsilon}}_0 + \dot{\varepsilon}_0)}{\nu_2-\nu_1}(1+e^{-t/\nu_2}) + \widehat{\dot{\varepsilon}}_0 t$$

де $\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}(0)$, $\ddot{\varepsilon}_0 = \ddot{\varepsilon}(0)$, $\widehat{\dot{\varepsilon}} = \sigma_0/\eta$ — частковий розв'язок рівняння $P(\dot{\varepsilon}) = \sigma_0/\eta_H$, а часи релаксації деформації при постійному напруженні ν_i визначаються за допомогою характеристичного рівняння $\nu^2 - d_1\nu + d_2 = 0$ (d_i — коефіцієнти РР (17)).

Якщо в момент $t = t_1$ зняти навантаження, то в тілі буде відбуватися післядія. Деформація в цьому випадку запишеться в такий спосіб:

$$\varepsilon = \frac{\nu_1^2(\ddot{\varepsilon}_1\nu_2 - \widehat{\dot{\varepsilon}}_1 + \dot{\varepsilon}_1)}{\nu_2-\nu_1}(1+e^{-t'/\nu_1}) - \frac{\nu_2^2(\ddot{\varepsilon}_1\nu_1 - \widehat{\dot{\varepsilon}}_1 + \dot{\varepsilon}_1)}{\nu_2-\nu_1}(1+e^{-t'/\nu_2})\ddot{e},$$

де $t' = t - t_1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$, $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}(t_1)$, і буде змінюватися від ε_1 при $t = t_1$ до 0 при $t = \infty$;

2) якщо в тілі має місце постійна деформація $\varepsilon = \varepsilon_0$, то напруження σ визначатиметься таким чином:

$$\sigma = \frac{\tau_1(\sigma_0 + \tau_2\dot{\sigma}_0)}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2(\sigma_0 + \tau_1\dot{\sigma}_0)}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2}, \tag{24}$$

де $\sigma_0 = \sigma(0)$, $\dot{\sigma}_0 = \dot{\sigma}(0)$, а часи релаксації напружень при постійній деформації будуть визначатись з $\nu^2 - c_1\nu + c_2 = 0$ (c_i — коефіцієнти РР (17)). З рівняння (24) випливає, що напруження буде релаксувати від σ_0 при $t = 0$ до при $t = \infty$;

3) у випадку, коли на досліджуване РТ діє гармонічне напруження $\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t}$, деформацію описуватимемо так:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)},$$

а зсув фаз між напруженням і деформацією буде визначатися таким чином:

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{b_1 - a_1 - \omega^2(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{1 + \omega^2(a_1 b_1 - a_2 - b_2) + \omega^4 a_2 b_2}. \tag{25}$$

З рівняння (23) випливає, що чисельник і знаменник в (25) додатні, так що деформація в розглянутому випадку запізнюватиметься від напруження на кут δ.

За допомогою хвильових чисел можна отримати вирази для фазових швидкостей і коефіцієнтів затухання пружних хвиль для слабкопружних фізичних середовищ:

$$V = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(k)} = c_0\left(1 - \frac{\beta_i^2}{2}\right), \qquad \alpha_1 = \mathrm{Im}(k) = \frac{\omega\beta_i}{2\widetilde{c}_0\left(1 + \dfrac{\beta_i^2}{2}\right)},$$

де $c_0 = \sqrt{\widehat{E}^i/\rho}$, а $i = H$ для КПРТ та $i = N$ для КВРТ.

1. *Савін Г. М., Рущицький Я. Я.* Елементи механіки спадкових середовищ. – Київ: Вища шк., 1975. – 252 с.
2. *Кондратьев О. К.* Сейсмические волны в поглощающих средах. – Москва: Недра, 1986. – 176 с.
3. *Уайт Дж.* Возбуждение и распространение сейсмических волн. – Москва: Недра, 1986. – 261 с.
4. *Постников В. С.* Внутреннее трение в металлах. – Москва: Металлургия, 1974. – 352 с.
5. *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. – Москва: Мир, 1965. – 200 с.

Інститут геофізики ім С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 05.06.2008

E. M. Bytsan'

Propagation of plane seismic waves in five-element rheologic bodies

A dynamical problem of elasticity theory for five-element rheological bodies is considered. The rheological equations and the analytic formulas for the determination of phase velocities and the decay coefficients for elastic waves, as well as the characteristic equations for the times of relaxation and aftereffect, are deduced.