УДК 539.182+518.5+517.986.69

В. А. Владіміров, С. І. Скуратівський

Усамітнені хвилі з компактним носієм у континуальному аналозі моделі гетерогенного середовища

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. А. Даниленком)

Встановлено умови існування в моделі гетерогенного середовища однопараметричної сім'ї компактонних розв'язків.

Поширення швидких, інтенсивних хвильових процесів у середовищах в основному супроводжується ефектами, пов'язаними з дискретністю його структури. Найбільш просто такі явища розглядаються у випадку середовищ з дальнім порядком розташування його структурних елементів. Зокрема, в статтях В. Ф. Нестеренка [1, 2] вивчались особливості поширення нелінійних поздовжніх коливань у ланцюгу осциляторів сферичної форми, рівняння руху яких має такий вигляд:

$$\ddot{u}_i = A(u_{i-1} - u_i)^n - A(u_i - u_{i+1})^n, \tag{1}$$

де u_i — зміщення центру маси i-го тіла. Система (1) репрезентує собою найпростішу одновимірну нелінійну модель гетерогенного зернистого середовища. В рамках числового та експериментального вивчення моделі (1) було зазначено [1, 2], що при імпульсному навантаженні в системі стальних куль спостерігалось формування стаціонарних усамітнених хвиль з властивостями, істотно відмінними від солітонів рівняння КдВ: їх характерний просторовий розмір не залежить від амплітуди збурення, нелінійна залежність фазової швидкості усамітненої хвилі від максимуму масової швидкості, взаємодія їх майже "пружна". Вказані властивості певною мірою притаманні компактонам — розв'язкам рівнянь з $K(m,n)$ ієрархії [3–5].

Як показано в статті [2], з рівняння (1) у довгохвильовому континуальному наближенні можна отримати нелінійне хвильове рівняння:

$$u_{tt} = -C^2\{(-u_x)^n + \beta[(-u_x)^{(n-1)/2}((-u_x)^{(n+1)/2})_{xx}]\}_x, \tag{2}$$

де $C^2 = Aa^{n+1}$, $\beta = na^2/(6(n+1))$, a — відстань між центрами куль.

С. Гаврилюк та С. Шургін у публікації [6] довели, що рівняння (2) при заміні $u_t \to \chi$, $u_x \to \sigma$ формально можна звести до системи рівнянь гідродинамічного типу:

$$\begin{aligned} &\sigma_t - \chi_x = 0, \qquad \chi_t + p_x = 0,\\ &p = -C^2\{(-\sigma)^n + \beta[(-\sigma)^{(n-1)/2}((-\sigma)^{(n+1)/2})_{xx}]\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Наявність компактонних розв'язків у системах гідродинамічного типу, які враховують нелокальні ефекти, показано в роботах [7, 8]. Система (3) аналогічна системі з [8], однак містить деякі відмінні риси, які зумовлюють у кінцевому випадку значну різницю отриманих результатів (порівняльний аналіз компактонних розв'язків буде проведений в заключній частині даного повідомлення).

Отже, дослідження рівняння (2) мотивовані тим, що воно є континуальним аналогом системи (1), яка має компактонні розв'язки. З іншого боку, цікавість до неї викликана тією обставиною, що до недавнього часу в літературі на компактонну тематику переважали дослідження абстрактних рівнянь типу членів $K(m,n)$ ієрархії [3]. Пред'явлення фізично змістовних моделей з компактонами дозволить наповнити практичним змістом цю швидко прогресуючу область математичної фізики.

Компактонні розв'язки рівняння (2). Пошук компактонів цього рівняння будемо проводити у множині розв'язків типу хвилі, яка біжить, тобто таких, які залежать від однієї змінної $\xi = x - Dt$ (тут D — швидкість хвилі). Використовуючи нові змінні $u_t = V$, $u_x = -\sigma$ у співвідношенні (2), отримаємо таку систему:

$$\begin{aligned} &\sigma_t + V_x = 0, \\ &V_t + C^2\{\sigma^n + \beta[\sigma^{(n-1)/2}(\sigma^{(n+1)/2})_{xx}]\}_x = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Припустимо, що $\sigma = S(\xi)$, $V = U(\xi)$. Тоді перше рівняння системи (4) інтегрується в квадратурах

$$U = DS + L, \qquad L = \text{const}, \tag{5}$$

а інше — наведемо з урахуванням (5):

$$-D^2S + C^2\{S^n + \beta S^{(n-1)/2}(S^{(n+1)/2})''\} = 0, \tag{6}$$

де $(\cdot)' = d/d\xi$. Для того щоб ввести нову функцію $W = -S'$ та незалежну змінну T у відповідності з співвідношенням

$$\frac{d}{dT} = \delta S^{n-1}\frac{d}{d\xi} \equiv \beta\frac{n+1}{2}C^2S^{n-1}\frac{d}{d\xi},$$

перепишемо формулу (6) у вигляді гамільтонової системи

$$\begin{aligned} &\frac{dS}{dT} = -\delta S^{n-1}W = -\frac{\partial H}{\partial W}, \\ &\frac{dW}{dT} = -D^2S + C^2\left\{S^n + \beta\frac{n^2-1}{4}S^{n-2}W^2\right\} = \frac{\partial H}{\partial S} \end{aligned} \tag{7}$$

з функцією Гамільтона

$$H(W,S) = \frac{1}{2}\delta S^{n-1}W^2 + C^2\frac{S^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2}D^2S^2. \tag{8}$$

Система (7) має дві особливі точки (ОТ): точку $(0,0)$, розташовану на лінії непродовжуваності розв'язків $S = 0$, і точку $(S_1, 0)$, $S_1 = (D/C)^{2/\alpha}$, $\alpha = n - 1$, розташовану на додатній частині горизонтальної осі. Аналіз матриці Якобі

$$J\Big|_{\substack{S=S_1\\W=0}} = \frac{\partial(-\partial H/\partial W, \partial H/\partial S)}{\partial(S,W)}\Big|_{\substack{S=S_1\\W=0}} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta S_1^{n-1} \\ -D^2 + C^2nS_1^{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

показує, що ОТ $(S_1, 0)$ буде центром при $\alpha > 0$. Інша ОТ при деяких додаткових припущеннях є топологічним сідлом.

Таким чином, аналогічно, як це має місце у випадку редукції рівнянь $K(m,n)$ ієрархії [7], у фазовій площині (S, W) — скінченна область, заповнена періодичними траєкторіями, що оточують ОТ $(S_1, 0)$. Обмеженням цієї області є гомоклінічна траєкторія, яка і є образом шуканого компактону.

Надалі аналіз буде проводитись аналітичними засобами, оскільки внаслідок гамільтоновості системи (7), її розв'язки можна зобразити у вигляді квадратур:

$$W^2 = \frac{2}{\delta S^{n-1}}\left\{K + D^2\frac{S^2}{2} - C^2\frac{S^{n+1}}{n+1}\right\}, \tag{9}$$

де K — стале значення функції $H(W,S)$ на даній фазовій траєкторії. Шуканий розв'язок, який описує компактон, отримаємо за умови $K = 0$:

$$W = \pm\sqrt{\frac{2}{\delta}\left[\frac{D^2}{2}S^{2-\alpha} - \frac{C^2}{n+1}S^2\right]}. \tag{10}$$

При $0 < \alpha < 2$ формула (10) описує замкнену криву, двоасимптотичну до ОТ $(0,0)$. Інша точка перетину траєкторії (10) з горизонтальною віссю визначається формулою

$$S_* = \left[\frac{D^2(n+1)}{2C^2}\right]^{1/\alpha}.$$

Елементарний аналіз показує, що $S_1 < S_*$ при $n > 1$ відповідно до попередніх припущень. Таким чином, за вказаних вище умов динамічна система (7) повторює геометричну конфігурацію, що має місце у випадку систем звичайних диференціальних рівнянь, породжених редукцією рівнянь $K(m,n)$ ієрархії [3, 7]. ОТ $(0,0)$ лежить на лінії непродовжуваності розв'язків $S = 0$, звідси виходить, що гомоклінічна траєкторія "проходить" за скінченний час. Зшиваючи розв'язок, відповідний гомокліниці, з нульовим сталим розв'язком, отримаємо компактон. При $n = 2$ $(\alpha = 1)$ цей розв'язок знаходимо в аналітичному вигляді. А саме, при $\alpha = 1$ співвідношення (10) є рівнянням з відокремлюваними змінними

$$W = \frac{dS}{d\xi} = \sqrt{\frac{2}{\delta}\left[\frac{D^2 S}{2} - \frac{C^2}{3}S^2\right]},$$

яке можна навести так:

$$\frac{d\left(\dfrac{S}{\Delta} - 1\right)}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{S}{\Delta} - 1\right)^2}} = \frac{2}{3\sqrt{\beta}}d\xi, \tag{11}$$

де $\Delta = 3D^2/(4C^2)$. Інтегруючи рівняння (11), отримаємо:

$$S = \begin{cases} \Delta\left[1 + \sin\left(\dfrac{2}{3\sqrt{\beta}}(\xi - \xi_0)\right)\right], & -\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{2}{3\sqrt{\beta}}(\xi - \xi_0) < \dfrac{3\pi}{2}, \\ 0, \quad \dfrac{2}{3\sqrt{\beta}}(\xi - \xi_0) \geqslant \dfrac{3\pi}{2} \vee \dfrac{2}{3\sqrt{\beta}}(\xi - \xi_0) \leqslant -\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

На жаль, при інших значеннях параметра α з інтервалу $(0, 2)$ отримати аналітичні розв'язки, які виражаються в елементарних функціях, не вдалося. Однак висунуте вище твердження відносно характеру гомоклінічної траєкторії залишається в силі.

Таким чином, нами показано, що рівняння (2) має однопараметричну сім'ю компактонних розв'язків, успадковуючи властивості свого дискретного аналога (1). Слід зазначити, що це поки що єдина континуальна модель гідродинамічного типу, в якій компактонні розв'язки утворюють однопараметричну сім'ю. В гідродинамічній моделі, яка враховує ефекти релаксації [7], кожному набору параметрів відповідає один-єдиний компактонний розв'язок. У моделі гідродинамічного типу, розглянутій у статті [8], де враховуються ефекти просторової нелокальності, для кожного набору параметрів існує пара компактонів, які рухаються з фіксованою швидкістю у протилежних напрямах.

1. *Лазариди А. Н., Нестеренко В. Ф.* Обнаружение уединенных волн нового типа в одномерной зернистой среде // Прикл. механика и техн. физика. – 1985. – № 3. – С. 115–118.
2. *Нестеренко В. Ф.* Импульсное нагружение гетерогенных материалов. – Москва: Наука, 1992. – 200 с.
3. *Rosenau P., Hyman J.* Compactons: solitons with finite wavelength // Phys. Rev. Lett. – 1993. – **70**, No 5. – P. 564–567.
4. *Rosenau P., Pikovsky A.* Phase compactons in chains of dispersively coupled oscillators // Ibid. – 2005. – **94**. – P. 174102.
5. *Pikovsky A., Rosenau P.* Phase compactons // Physica D. – 2006. – **218**. – P. 56–69.
6. *Гаврилюк С. Л., Шургин С. М.* Среды с уравнениями состояния, зависящими от производных // Прикл. механика и техн. физика. – 1996. – **37**, № 2. – С. 35–49.
7. *Vladimirov V. A.* Compacton-like solutions of the hydrodynamic system describing relaxing media // Rep. Math. Phys. – 2008. – **61**. – P. 381–400.
8. *Vladimirov V. A.* Compacton-like solutions of the nonlocal hydrodynamic-type // arXiv:0804.2022v1.

Університет науки і технології, Краків, Польща
Відділення геодинаміки вибуху Інституту геофізики
ім. С. І. Субботіна НАН України, Київ

Надійшло до редакції 05.06.2008

V. A. Vladimirov, S. I. Skurativskyy

Solitary waves with compact support in a continual analog of the model of heterogeneous medium

Conditions for the existence of a one-parameter set of compact solutions of the model of heterogeneous medium are established.