УДК 517.956.222+517.982.27+517.518.362

В. А. Михайлец, А. А. Мурач

Об эллиптических операторах на замкнутом компактном многообразии

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Еліптичні псевдодиференціальні оператори на замкненому многовиді вивчено в просторах Хермандера з ваговими функціями, RO-змінними на нескінченності змінної $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$*. Встановлено, що клас цих функціональних просторів збігається з класом усіх інтерполяційних гільбертових просторів для пар гільбертових просторів Соболева. Доведено фредгольмовість еліптичного оператора в таких просторах. Одержано їх еквівалентні описи. Знайдено деякі застосування введених функціональних просторів до спектральних проблем.*

В работе изучены эллиптические псевдодифференциальные операторы в изотропных гильбертовых пространствах Хермандера [1]. Весовая функция в них является RO-меняющейся на бесконечности по Авакумовичу [2] переменной $(1+|\xi|^2)^{1/2}$. Основной результат состоит в том, что класс таких пространств совпадает (с точностью до эквивалентности норм) с классом всех интерполяционных гильбертовых пространств для пар гильбертовых пространств Соболева. Это позволило распространить на указанные пространства теорию эллиптических операторов [3, 4], заданных на гладком замкнутом компактном многообразии. Получены также эквивалентные описания этих пространств. В качестве приложения даны достаточные условия сходимости почти всюду рядов по собственным функциям нормальных эллиптических псевдодифференциальных операторов в терминах введенных функциональных пространств.

Для более узкой шкалы пространств Хермандера (уточненная шкала) эллиптические операторы и эллиптические краевые задачи изучены авторами ранее [5–9].

1. Пространства Хермандера. Пусть целое число $n \geqslant 1$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — топологическое линейное пространство распределений медленного роста в $\mathbb{R}^n$, а $\widehat{u}$ — преобразование Фурье распределения $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. (Распределения трактуются как антилинейные функционалы.) Положим $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$ для вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Предположим, что измеримая по Борелю функция $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ является весовой в смысле [10, с. 9], т. е. существуют числа $c \geqslant 1$ и $l > 0$ такие, что

$$\frac{\varphi(\tau)}{\varphi(t)} \leqslant c\bigl(1+|\tau-t|^l\bigr) \qquad \text{для всех} \qquad \tau, t \geqslant 1.$$

Определение 1. Линейное пространство $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех распределений $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\widehat{u}$ локально суммируемо по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

В пространстве $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ определено скалярное произведение распределений u_1, u_2 по формуле

$$(u_1, u_2)_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\widehat{u_1}(\xi)\overline{\widehat{u_2}(\xi)}\, d\xi.$$

Оно задает на $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ структуру гильбертова пространства.

Пространство $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ является частным (изотропным) гильбертовым случаем пространств Хермандера [1, с. 54]. Отметим, что в гильбертовом случае пространства Хермандера совпадают с пространствами, введенными и изученными Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом [10, с. 14].

Пусть далее Γ — замкнутое компактное бесконечно гладкое многообразие размерности n. Предполагается, что на Γ задана некоторая C^{∞}-плотность dx. Пусть $\mathcal{D}'(\Gamma)$ — топологическое линейное пространство всех распределений на Γ. Оно двойственно к топологическому линейному пространству $C^{\infty}(\Gamma)$ относительно расширения по непрерывности скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$ в пространстве $L_2(\Gamma) := L_2(\Gamma, dx)$.

Определим теперь пространства Хермандера на Γ. Возьмем конечный атлас из C^{∞}-структуры на Γ, образованный локальными картами $\alpha_j\colon \mathbb{R}^n \leftrightarrow U_j$, $j = 1,\ldots,r$, где открытые множества U_j составляют конечное покрытие компактного многообразия Γ. Пусть функции $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, $j = 1,\ldots,r$, образуют разбиение единицы на Γ, удовлетворяющее условию $\operatorname{supp}\chi_j \subset U_j$.

Определение 2. Линейное пространство $H^{\varphi}(\Gamma)$ состоит из всех распределений $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, что $(\chi_j f)\circ\alpha_j \in H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ для каждого $j = 1,\ldots,r$. Здесь $(\chi_j f)\circ\alpha_j$ — представление распределения $\chi_j f$ в локальной карте α_j. В пространстве $H^{\varphi}(\Gamma)$ определено скалярное произведение распределений f_1 и f_2 по формуле

$$(f_1, f_2)_{\varphi} := \sum_{j=1}^{r}((\chi_j f_1)\circ\alpha_j, (\chi_j f_2)\circ\alpha_j)_{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)}.$$

Оно естественным образом задает норму $\|f\|_{\varphi} := (f,f)_{\varphi}^{1/2}$.

Приведенное определение является локальным. Как выяснится ниже, в рассмотренной нами ситуации это пространство полное и не зависит (с точностью до эквивалентности норм) от выбора локальных карт и разбиения единицы на Γ.

2. Интерполяционные свойства пространств Соболева и Хермандера. Далее мы ограничимся следующим подклассом весовых функций.

Определение 3. Пусть RO — множество всех измеримых по Борелю функций $\varphi\colon [1,\infty)\to(0,\infty)$, для которых существуют числа $a > 1$ и $c \geqslant 1$ такие, что

$$c^{-1} \leqslant \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leqslant c \qquad \text{для любых} \qquad t \geqslant 1, \qquad \lambda \in [1, a]$$

(постоянные a и c зависят от φ). Такие функции называют RO-меняющимися на бесконечности [2, с. 86].

Из [2, с. 88] следует, что для любой функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ существуют числа s_0, $s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leqslant s_1$, и $c_1 \geqslant 1$ такие, что

$$c_1^{-1}\lambda^{s_0} \leqslant \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leqslant c_1\lambda^{s_1} \qquad \text{при} \qquad t \geqslant 1, \qquad \lambda \geqslant 1. \tag{1}$$

Положим

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} \colon \text{выполняется (1)}\},$$
$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} \colon \text{выполняется (1)}\}.$$

Очевидно, что $-\infty < \sigma_0(\varphi) \leqslant \sigma_1(\varphi) < \infty$.

Если для функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ определен порядок изменения $\sigma \in \mathbb{R}$, т. е. $\sigma_0(\varphi) = \sigma_1(\varphi) =: \sigma$, то удобно обозначение $H^{\varphi}(\Gamma) =: H^{\sigma,\varphi_0}(\Gamma)$, где $\varphi(t) = t^{\sigma}\varphi_0(t)$. В случае, когда функция φ_0 медленно меняется по Карамата на бесконечности [2, с. 10], пространство $H^{\sigma,\varphi_0}(\Gamma)$ изучено авторами в [5, 8]. Для степенной функции $\varphi(t) = t^{\sigma}$ пространство $H^{\varphi}(\Gamma)$ совпадает с гильбертовым пространством Соболева $H^{\sigma}(\Gamma)$.

Изучим интерполяционные свойства пространств $H^{\varphi}(\Gamma)$, где $\varphi \in \mathrm{RO}$.

Приведем необходимые нам факты теории интерполяции пар комплексных гильбертовых пространств. При этом достаточно ограничиться сепарабельными пространствами. Упорядоченную пару $[X_0, X_1]$ гильбертовых пространств X_0 и X_1 назовем допустимой, если эти пространства сепарабельные и справедиво непрерывное и плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$.

Определение 4. Гильбертово пространство H называют интерполяционным для допустимой пары гильбертовых пространств $[X_0, X_1]$, если:

а) справедливы непрерывные вложения $X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_0$;

б) произвольный линейный оператор $T \colon X_0 \to X_0$, ограниченный в каждом из пространств X_0 и X_1, является также ограниченным оператором в пространстве H.

Нам потребуется определение интерполяции с функциональным параметром. Она является естественным обобщением классического интерполяционного метода Ж.-Л. Лионса и С. Г. Крейна.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех измеримых по Борелю функций $\psi \colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, ограниченных на каждом отрезке $[a, b]$, где $0 < a < b < \infty$, и отделенных от нуля на каждом множестве $[r, \infty)$, где $r > 0$.

Пусть произвольно заданы функция $\psi \in \mathcal{B}$ и допустимая пара гильбертовых пространств $X = [X_0, X_1]$. Для пары X существует изометрический изоморфизм $J \colon X_1 \leftrightarrow X_0$ такой, что J является самосопряженным положительно определенным оператором в пространстве X_0 с областью определения X_1. Оператор J называется порождающим для пары X и определяется ею однозначно.

В пространстве X_0 определен, как борелевская функция от J, оператор $\psi(J)$. Обозначим через $[X_0, X_1]_{\psi}$ или, короче, X_{ψ} область определения оператора $\psi(J)$, наделенную скалярным произведением $(u_1, u_2)_{X_{\psi}} := (\psi(J)u_1, \psi(J)u_2)_{X_0}$ и соответствующей нормой. Пространство X_{ψ} сепарабельно и полно, т. е. гильбертово.

Определение 5. Функция $\psi \in \mathcal{B}$ называется интерполяционным параметром, если для произвольных допустимых пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств и для любого линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее. Если при $j = 0, 1$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T \colon X_j \to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство X_{ψ} является ограниченным оператором $T \colon X_{\psi} \to Y_{\psi}$.

Из описания Я. Петре [11, с. 153] класса всех интерполяционных функций следует, что функция $\psi \in \mathcal{B}$ является интерполяционным параметром тогда и только тогда, когда она псевдовогнута в окрестности бесконечности, т. е. (слабо) эквивалентна там некоторой положительной вогнутой функции (см. доказательство в [8, с. 88]). В. И. Овчинниковым [12] установлено, что класс всех гильбертовых пространств, интерполяционных для пары X, совпадает (с точностью до эквивалентности норм) с классом пространств X_ψ, где $\psi \in \mathcal{B}$ — произвольная псевдовогнутая функция в окрестности бесконечности.

Для пар гильбертовых пространств Соболева описание всех интерполяционных гильбертовых пространств может быть получено в терминах пространств Хермандера.

Теорема 1. *Пусть заданы функции φ_0, $\varphi_1 \in \mathrm{RO}$ и $\psi \in \mathcal{B}$. Предположим, что функция φ_0/φ_1 ограничена в окрестности бесконечности, а ψ — интерполяционный параметр. Положим $\varphi(t) := \varphi_0(t)\psi(\varphi_1(t)/\varphi_0(t))$ при $t \geqslant 1$. Тогда $\varphi \in \mathrm{RO}$ и*

$$[H^{\varphi_0}(\Gamma), H^{\varphi_1}(\Gamma)]_\psi = H^\varphi(\Gamma) \text{ с эквивалентностью норм.}$$

Теорема 2. *Пусть заданы функция $\varphi \in \mathrm{RO}$ и целые числа s_0, s_1 такие, что $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ и $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Положим*

$$\psi(t) := t^{-s_0/(s_1-s_0)}\varphi(t^{1/(s_1-s_0)}) \quad \text{при} \quad t \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \psi(t) := \varphi(1) \quad \text{при} \quad 0 < t < 1.$$

Тогда функция $\psi \in \mathcal{B}$ является интерполяционным параметром и

$$[H^{s_0}(\Gamma), H^{s_1}(\Gamma)]_\psi = H^\varphi(\Gamma) \text{ с эквивалентностью норм.} \tag{2}$$

Таким образом, класс всех интерполяционных гильбертовых пространств для допустимых пар гильбертовых пространств Соболева совпадает с классом пространств Хермандера $\{H^\varphi(\Gamma)\colon \varphi \in \mathrm{RO}\}$. Он замкнут относительно интерполяции, результатом которой есть гильбертово пространство. Аналогичный результат справедлив и для пространств $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$.

В силу теоремы 2 каждое пространство $H^\varphi(\Gamma)$, $\varphi \in \mathrm{RO}$, сепарабельно гильбертово и не зависит (с точностью до эквивалентности норм) от выбора локальных карт и разбиения единицы на многообразии Γ, поскольку этими свойствами обладают пространства Соболева [3, с. 64, 66]. Равенство (2) можно принять в качестве альтернативного интерполяционного определения пространства $H^\varphi(\Gamma)$.

3. Эллиптический оператор в пространствах Хермандера. Пусть на многообразии Γ задан классический (полиоднородный) псевдодифференциальный оператор (ПДО) A произвольного порядка $m \in \mathbb{R}$. Для него определен главный символ $a_0(x,\xi)$, являющийся бесконечно гладкой комплекснозначной функцией аргументов $x \in \Gamma$ и $\xi \in T^*_x\Gamma \setminus \{0\}$, однородной степени m по переменной ξ. Здесь $T^*_x\Gamma$ — кокасательное пространство к многообразию Γ в точке x. ПДО A линеен и непрерывен в каждом из топологических линейных пространств $C^\infty(\Gamma)$ и $\mathcal{D}'(\Gamma)$.

Предположим, что ПДО A эллиптичен на Γ, т. е. $a_0(x,\xi) \neq 0$ для любых точки $x \in \Gamma$ и ковектора $\xi \in T^*_x\Gamma \setminus \{0\}$.

Изучим свойства эллиптического ПДО A в пространствах Хермандера $H^\varphi(\Gamma)$, где $\varphi \in \mathrm{RO}$. Обозначим через A^+ классический ПДО, формально сопряженный к оператору A относительно плотности dx. Положим

$$N := \{u \in C^\infty(\Gamma)\colon Au = 0 \text{ на } \Gamma\}, \qquad N^+ := \{v \in C^\infty(\Gamma)\colon A^+v = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Поскольку ПДО A и A^+ одновременно эллиптичны на Γ, то [4, с. 28] пространства N и N^+ конечномерны. Положим также $\rho(t) := t$ при $t \geqslant 1$.

Напомним, что линейный ограниченный оператор $T\colon B_1 \to B_2$, где B_1, B_2 — банаховы пространства, называют нетеровым, если его ядро конечномерно, а область значений $T(B_1)$

замкнута в B_2 и имеет там конечную коразмерность. Индексом нетерового оператора T называют целое число $\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(B_2/T(B_1))$.

Теорема 3. *Сужение отображения $u \mapsto Au$, $u \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, на пространство $H^{\varphi}(\Gamma)$ является линейным ограниченным оператором*

$$A\colon H^{\varphi\rho^m}(\Gamma) \to H^{\varphi}(\Gamma) \qquad \text{для любого} \qquad \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{3}$$

Этот оператор нетеров, его ядро совпадает с пространством N, а область значений равна множеству

$$\{f \in H^{\varphi}(\Gamma)\colon (f,v)_{\Gamma} = 0 \text{ для всех } v \in N^{+}\}.$$

Индекс оператора (3) *равен числу* $\dim N - \dim N^{+}$ *и не зависит от* φ.

Отметим [4, с. 32], что в случае $\dim\Gamma \geqslant 2$ индекс оператора (3) равен нулю. В случае $\dim\Gamma = 1$ индекс может быть ненулевым. Если оператор A дифференциальный, то его индекс равен нулю всегда.

4. Эквивалентные определения пространств Хермандера. Предположим, что эллиптический ПДО A порядка $m > 0$ является (неограниченным) самосопряженным положительно определенным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma)$. Доопределим функцию $\varphi \in \mathrm{RO}$ равенством $\varphi(t) := \varphi(1)$ при $0 < t < 1$. Поскольку $\operatorname{Spec} A \subset (0,\infty)$, в пространстве $L_2(\Gamma)$ определен оператор $\varphi(A^{1/m})$ как борелевская функция $\varphi(t^{1/m})$, $t > 0$, от оператора A.

Определение 6. Обозначим через $H^{\varphi}_{A}(\Gamma)$ пополнение пространства $C^{\infty}(\Gamma)$ по гильбертовой норме

$$f \mapsto \|\varphi(A^{1/m})f\|_{L_2(\Gamma)} =: \|f\|_{\varphi,A}.$$

Теорема 4. *Для произвольной функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ нормы в пространствах $H^{\varphi}(\Gamma)$ и $H^{\varphi}_{A}(\Gamma)$ эквивалентны на плотном множестве $C^{\infty}(\Gamma)$. Тем самым $H^{\varphi}(\Gamma) = H^{\varphi}_{A}(\Gamma)$ с точностью до эквивалентности норм.*

Эта теорема дает эквивалентное операторное определение пространства $H^{\varphi}(\Gamma)$.

Пусть $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ — монотонно неубывающая положительная последовательность всех собственных чисел оператора A, записанных с учетом их кратности, а $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Gamma)$, образованный собственными функциями $h_j \in C^{\infty}(\Gamma)$ оператора A: $Ah_j = \lambda_j h_j$. Тогда для любого распределения $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ справедливо разложение в ряд Фурье

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(f) h_j \qquad (\text{сходимость в } \mathcal{D}'(\Gamma)), \tag{4}$$

где $c_j(f) := (f, h_j)_{\Gamma}$ — коэффициенты Фурье распределения f в базисе $(h_j)_{j=1}^{\infty}$.

Теорема 5. *Пусть $\varphi \in \mathrm{RO}$. Тогда*

$$H^{\varphi}(\Gamma) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Gamma)\colon \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^2(j^{1/n})|c_j(f)|^2 < \infty \right\}.$$

При этом существует число $c = c(\varphi) \geqslant 1$ такое, что для любого $f \in H^{\varphi}(\Gamma)$

$$c^{-1}\|f\|_{\varphi} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi^2(j^{1/n})|c_j(f)|^2 \right)^{1/2} \leqslant c\|f\|_{\varphi}.$$

Теорема 5 дает еще одно эквивалентное определение пространства $H^{\varphi}(\Gamma)$. Отметим, что для каждого распределения $f \in H^{\varphi}(\Gamma)$ ряд (4) сходится в пространстве $H^{\varphi}(\Gamma)$.

Примером рассмотренного в этом пункте ПДО A служит оператор $1 - \triangle$, где $\triangle$ — оператор Бельтрами–Лапласа на Γ (для него $m = 2$).

В случае, когда многообразие Γ есть окружность, пространства $H^{\varphi}(\Gamma)$ тесно связаны с пространствами периодических функций, введенных А. И. Степанцом [13].

5. Приложение к сходимости спектральных разложений. Предположим, что эллиптический ПДО A положительного порядка является (неограниченным) нормальным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma)$. Рассмотрим сходимость почти всюду ряда (4) по полной ортонормированной системе $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ собственных функций этого оператора. Пусть они занумерованы так, что модули соответствующих собственных чисел образуют монотонно неубывающую последовательность. Положим $\log^* t := \max\{1, \log t\}$.

Теорема 6. *Для любой функции* $f \in H^{\log^*}(\Gamma)$ *ряд* (4) *сходится почти всюду на* Γ.

Теорема 7. *Пусть возрастающая функция* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dt}{t(\log t)\varphi^2(t)} < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in H^{\varphi \log^*}(\Gamma)$ *ряд* (4) *безусловно сходится почти всюду на* Γ.

Эти теоремы обобщают и существенно уточняют результаты работы [14].

1. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.
2. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 142 с.
3. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – Москва: Наука, 1978. – 280 с.
4. *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фунд. напр. / ВИНИТИ. – Москва, 1990. – Т. 63. – С. 5–129.
5. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 3. – С. 352–370.
6. *Мурач А. А.* Эллиптические псевдодифференциальные операторы в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии // Там же. – 2007. – **59**, № 6. – С. 798–814.
7. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств // Там же. – 2008. – **60**, № 4. – С. 497–520.
8. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. Topology. – 2008. – **14**, No 1. – P. 81–100.
9. *Murach A. A.* Douglis–Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold // Ibid. – 2008. – **14**, No 2. – P. 142–158.
10. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.
11. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – Москва: Мир, 1980. – 264 с.
12. *Ovchinnikov V. I.* The methods of orbits in interpolation theory // Math. Rep. Ser. 1. – 1984. – No 2. – P. 349–515.
13. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
14. *Meaney C.* On almost-everywhere convergent eigenfunction expansions of the Laplace–Beltrami operator // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1982. – **92**. – P. 129–131.

Институт математики НАН Украины, Киев
Черниговский государственный технологический университет

Поступило в редакцию 15.10.2008

V. A. Mikhailets, A. A. Murach

On elliptic operators on a closed compact manifold

Elliptic pseudo-differential operators on a closed manifold are studied on the Hörmander spaces with weight functions of $(1+|\xi|^2)^{1/2}$ *RO-varying at* ∞. *It is established that the class of these functional spaces coincides with the class of all interpolation Hilbert spaces for couples of Hilbertian Sobolev spaces. The Fredholm property for an elliptic operator is proved for such spaces. Their equivalent descriptions are obtained. Some applications of the introduced functional spaces to spectral problems are found.*