ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2009

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 62-5(0753)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

Сингуларисная форма регулярных сигналов в системах автоматического управления

Наводяться нові математичні вирази вхідних регулярних сигналів систем автоматичного керування, що базуються на сингуларисному розкладанні стрибкуватих функцій.

В теории автоматического управления сложные регулярно следующие сигналы $x(t)$, где t — время, могут быть представлены совокупностью простых сигналов в виде гармоник $x_{ak}\sin\omega_k t$, $k=\overline{1,n}$, где x_{ak} — амплитуда; ω_k — круговая частота ($\omega_k = 2\pi f_k$, f_k — частота, Гц) единичных скачкообразных функций

$$1(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{при} & t \geqslant 0; \\ 0 & \text{при} & t < 0 \end{array} \right\}$$

или единичных импульсов

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}.$$

В работе [1] отмечено, что регулярный сигнал $x(t)$ можно представить в виде интеграла Дюамеля в форме

$$\underset{\text{при } \beta\to 0}{x(t)} = x(\beta)1(t) + \int\limits_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}1(t-\tau)d\tau, \tag{1}$$

в виде совокупности единичных импульсов

$$x(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^t x(\tau)\frac{d1(t-\tau)}{d\tau}d\tau, \tag{2}$$

в виде совокупности интегралов от единичных скачков, действующих в момент времени t_k,

$$x(t) = 1(t-t_k)\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{k!}(t-t_k)^k. \tag{3}$$

Гармонический сигнал, начавший действовать в системе в момент времени $t = 0$, можно выразить соотношением

$$x(t) = \sin(\omega t + \varphi)1(t) \qquad \text{и при} \quad t = 0 \qquad x(t) = \sin\varphi 1(0). \tag{4}$$

Как видно из (1), (4), в математических представлениях регулярных сигналов $x(t)$ фигурируют единичные скачкообразные функции $1(t)$.

В работах [2, 3] о новой концепции о переходных процессах в электроцепях введено особое (сингуларисное) разложение единичной скачкообразной функции. На наш взгляд, сингуларисное разложение, наряду с разложением функции $1(t)$ в ряд Фурье [4], имеет право на существование, особенно при расчете переходных процессов в системах, на входе которых действуют скачкообразные сигналы [1]. Сущность сингуларисного разложения функции $1(t)$ состоит в следующем [3].

Данное разложение включает в себя быстро затухающую экспоненту $(1 - \ell^{-\alpha t})$, где α — коэффициент затухания ($\alpha \to \infty$), и быстро затухающий ряд гармоник

$$\ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t, \qquad U_{a1} = \frac{1}{\pi}, \qquad U_{ak} = \frac{U_{a1}}{k}, \qquad k = \frac{\omega_1}{\omega_k}.$$

В целом выражение сингуларисного разложения $1(t)$ имеет вид

$$1(t) = 1 - \ell^{-\alpha t} + \ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t. \tag{5}$$

Для гармонического сигнала $\sin(\omega t+\varphi)1(t)$ сингуларисное разложение следующее [5, 6]:

$$\sin(\omega t + \varphi)1(t) = (1 - \ell^{-\alpha t})\sin(\omega t + \varphi) + \ell^{-\alpha t}\sin\varphi\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t. \tag{6}$$

В (5) и (6) при $\alpha = \infty$ $1(t) = 1$ и $\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi)$ соответственно; при $t = 0$ $\alpha \neq \infty$ $\sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} = 1(t)$; при $t = \infty$ $\alpha \neq \infty$ $1(t) = 1$, $\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi)$.

Эта проверка показывает правомочность сингуларисных разложений (5), (6). В работах [3, 5] показано, что сингуларисное разложение было создано на основе анализа начальных участков переходных процессов электрических цепей, на которых крутизна кривых графиков переходных процессов значительно меньше последующих участков. Физически этот факт объясняется эффектом автоматической реструктуризации электрических цепей с реактивными элементами [7]. Подобный эффект был обнаружен нами и в механических колебательных системах [8]. В работах [2, 3, 9] рассчитаны переходные процессы в RL и RC электроцепях при входных сигналах $U1(t)$. Однако, ввиду наличия сигналов $x(t)$ в виде (1)–(3), в которых присутствуют скачки, определяемые функциями $1(t)$, необходимо для решения задач по переходным процессам в электро- и других цепях включить, в частности, разложение (5).

Так, выражения (1)–(3) с учетом (5) имеют соответственно вид

$$
x(t) = x(\beta)\left(1 - \ell^{-\alpha t} + \ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t\right) +
$$
$$
+ \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}\left[1 - \ell^{-\alpha(t-\tau)} + \ell^{-\alpha(t-\tau)}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k(t-\tau)\right]d\tau, \tag{7}
$$

$$
x(t) = \int_0^t x(\tau)\frac{d}{d\tau}\left[1 - \ell^{-\alpha(t-\tau)} + \ell^{-\alpha(t-\tau)}\sum_{l=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_l(t-\tau)\right]d\tau, \tag{8}
$$

$$
x(t) = \left[1 - \ell^{-\alpha(t-t_k)} + \ell^{-\alpha(t-t_k)}\sum_{l=1}^{m} U_{ak}\cos\omega_l(t-t_k)\right]\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{k!}(t-t_k)^k. \tag{9}
$$

Конкретность в определении (7)–(9) зависит от вида $x(\tau)$, значит A_k и величин k и t_k.

Приложение сигналов в виде (7)–(9) ко входу электрической цепи с реактивными элементами обусловит в этих цепях автоматическую реструктуризацию и этим самым будет выявлен некоторый начальный участок в переходном процессе цепи, характеризующий пониженную чувствительность цепи ко входному воздействию. Выражения (7)–(9) являются обобщающей математической интерпретацией сингуларисных входных регулярных сигналов автоматических систем управления.

К регулярным сигналам импульсных автоматических систем относятся одиночный прямоугольный импульс, повторяющиеся (периодические) импульсы прямоугольной, полусинусоидальной и других форм. Все эти виды импульсных сигналов описываются выражениями, включающими единичные скачкообразные функции. Так, одиночный прямоугольный импульс может быть представлен как разность двух единичных функций, умноженных на постоянную величину U, в виде

$$
U(t) = U[1(t) - 1(t-\tau)], \tag{10}
$$

где τ — длительность импульса.

Применяя к (10) сингуларисное разложение (5), получим

$$
U(t) = U\left[1(t) - \ell^{-\alpha t} + \ell^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t - 1(t-\tau) + \ell^{-\alpha(t-\tau)} - \right.
$$
$$
\left. - \ell^{-\alpha(t-\tau)}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k(t-\tau)\right]. \tag{11}
$$

При $\alpha = \infty$ выражение (11) принимает вид (10). Известно [10], что прямоугольные периодически повторяющиеся импульсы длительностью τ_1 с паузой τ_2 и величиной E записываются в виде

$$
U = E[1(t=0) - 21(\tau_1) + 21(T) - 21(T+\tau_1) + 21(2T)\ldots], \tag{12}
$$

где $T = \tau_1 + \tau_2$ — период следования импульсов.

Сингуларисное представление (12) следующее:

$$U(t) = E\Biggl\{1 - 2\Biggl[1(t-\tau_1) + \ell^{-\alpha(t-\tau_1)} + \ell^{-\alpha(t-\tau_1)}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k(t-\tau_1)\Biggr] +$$
$$+ 2\Biggl[1(t-T) + \ell^{-\alpha(t-T)} + \ell^{-\alpha(t-T)}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k(t-T)\Biggr] -$$
$$-2\Biggl[1(t-T-\tau_1) + \ell^{-\alpha(t-T-\tau_1)} + \ell^{-\alpha(t-T-\tau_1)}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k(t-T-\tau_1)\Biggr] +$$
$$+ 2\Biggl[1(t-2T) + \ell^{-\alpha(t-2T)} + \ell^{-\alpha(t-2T)}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k(t-2T)\Biggr]\Biggr\}.$$

Импульсы, получаемые в результате двухполупериодного выпрямления, являющиеся полусинусоидальными, могут быть описаны с помощью единичных функций в виде [10]

$$U(t) = U_m \sin\omega t 1(t=0) + 2U_m \sin\omega(t-t_1)1(t-t_1) + 2U_m \sin\omega(t-2t_1)1(t-2t_1) +$$
$$+ \cdots + 2U_m \sin\omega[t-(n-1)t_1]1[t-(n-1)t_1], \qquad (13)$$

где U_m — амплитуда сигнала $U_m \sin\omega t$; t_1 — момент времени, равный $T/2$; T — период функций $\sin\omega t$; n — число импульсов.

Сингуларисное представление сигнала (13) имеет вид

$$U(t) = U_m \sin\omega t 1(t=0) + 2U_m \sin\omega(t-t_1) \times$$
$$\times \Biggl[1(t-t_1) + \ell^{-\alpha(t-t_1)} + \ell^{-\alpha(t-t_1)} + \sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k(t-t_1)\Biggr] + \cdots +$$
$$+ 2U_m \sin\omega[t-(n-1)t_1] \times$$
$$\times \Biggl\{1[t-(n-1)t_1] + \ell^{-\alpha[t-(n-1)t_1]} + \ell^{-\alpha[t-(n-1)t_1]}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega[t-(n-1)t_1]\Biggr\}.$$

Заметим, что сингуларисное представление сигналов целесообразно в электроцепях, имеющих реактивные элементы. В активных электроцепях такое представление сигналов излишнее. В электроцепях с реактивными элементами при скачкообразных входных сигналах возникает реструктуризация цепи [7] и при каждом импульсе и каждой паузе в цепи происходит переходный процесс тока или напряжения, т. е. электроцепь все время находится в динамическом состоянии. Следует добавить, что эффект автоматической реструктуризации электроцепи с реактивными элементами проявляется и при представлении скачкообразных функций, относящихся к входным сигналам, в виде рядов Фурье [4].

1. *Теория* автоматического управления / Под ред. проф. А. В. Нетушила. – Москва: Высш. шк., 1976. – 400 с.
2. *Божко А. Е.* Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Доп. НАН України. – 2004. – № 9. – С. 83–87.

3. *Божко А. Е.* Аргументированная детализация новой концепции о переходных процессах в электрических цепях // Там само. – 2007. – № 6. – С. 81–87.
4. *Андре Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров. – Москва: Наука, 1969. – 779 с.
5. *Божко А. Е.* К концепции о переходных процессах в электрических цепях // Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 72–76.
6. *Божко А. Е.* О новой трактовке переходных процессов в электрических цепях переменного тока // Там само. – 2005. – № 4. – С. 81–86.
7. *Божко А. Е.* Об автоматической реструктуризации электрических цепей с реактивными элементами при полигармонических входных сигналах // Там само. – 2002. – № 11. – С. 101–103.
8. *Божко А. Е.* Эффект автоматической реструктуризации механических систем, работающих в условиях действия полигармонических вибраций и ударов // Там само. – 2005. – № 1. – С. 47–49.
9. *Божко А. Е.* О новых решениях задач по переходным процессам разряда конденсаторов // Там само. – 2007. – № 7. – С. 87–92.
10. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 05.11.2007

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

The singularisnal form of regular signals in systems of automatic control

New mathematic expressions for input regular signals of systems of automatic control are given on the basis of the singularisnal expansion of jump-like functions.