

С. М. Яремченко

Напружено-деформований стан гофрованих циліндричних оболонок в уточненій постановці

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Дано розв'язання задач про напружений стан гофрованих у поперечному перерізі циліндричних оболонок змінної товщини в уточненій постановці з використанням методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації. Досліджено вплив частоти гофрування на розподіл полів переміщень та напружень.

Гофровані вздовж напрямної циліндри часто застосовуються як елементи конструкцій у сучасній техніці, тому задачі про напружено-деформований стан оболонок цього класу мають широке практичне значення [1]. У роботі [2] досліджено тонкі гофровані оболонки на основі гіпотези Кірхгофа–Лява. В [3] наведено підхід до розв'язання задач про напружений стан нетонких циліндричних гофрованих оболонок в уточненій постановці.

У даній роботі проведено аналіз впливу на напружений стан циліндричної оболонки змінної товщини частоти (кроку) її гофрування вздовж напрямної. За вихідні приймаються рівняння уточненої теорії оболонок, що враховує поперечні зсуви [4]. Дослідження проводилися з використанням методів сплайн-апроксимації [5, 1] і дискретної ортогоналізації [1] для розв'язання двовимірних крайових задач.

Нехай рівняння напрямної серединної поверхні циліндричної оболонки задано в полярній системі координат r, θ

$$r(\theta) = r_0 + \alpha \cos m\theta, \quad (1)$$

де r — полярний радіус; r_0 — радіус кругового циліндра; α — амплітуда; m — частота гофрування.

Віднесемо серединну поверхню оболонки до ортогональної системи координат s, θ , де s — координата вздовж твірної. Нехай γ — координата, нормальна до серединної поверхні оболонки. Перша квадратична форма серединної поверхні оболонки має такий вигляд:

$$dS^2 = ds^2 + A_2^2(\theta)d\theta^2 \quad (0 \leq s \leq l, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (2)$$

У цьому випадку $A_2 = \sqrt{r^2 + (r')^2}$.

Обравши за невідомі функції компоненти вектора переміщення серединної поверхні оболонки u, v, w та повні кути повороту ψ_s, ψ_θ , розв'язувальну систему рівнянь у частинних похідних, що описує напружений стан ортотропних некругових циліндричних оболонок, можна записати у вигляді [3, 6]

$$L\bar{y} = 0, \quad (3)$$

де L — лінійний диференціальний оператор другого порядку, а $\bar{y} = \{u, v, w, \psi_s, \psi_\theta\}$ — шукана вектор-функція.

Нехай торці оболонки жорстко закріплені, тоді на контурах $s = 0$, та $s = l$ задаються умови

$$\bar{y} = 0. \quad (4)$$

Будемо досліджувати оболонки, поперечний переріз яких має симетрію, тоді у відповідних двох точках $\theta = \text{const}$ виконуються такі умови:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} = \psi_\theta = 0. \quad (5)$$

Система рівнянь (3) і граничні умови (4), (5) утворюють двовимірну крайову задачу.

Оскільки у цьому випадку кривина поперечного перерізу серединної поверхні оболонки може значно змінюватись, то сплайн-апроксимацію будемо проводити вздовж твірної. Так як на торцях оболонки задано умови (4), то розв'язок задачі подамо у вигляді

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^N \bar{y}_i \varphi_i(s). \quad (6)$$

У виразі (6) $\bar{y}_i = \{u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta), \psi_{si}(\theta), \psi_{\theta i}(\theta)\}$ — невідомі функції, а $\varphi_i(s)$ — лінійні комбінації В-сплайнів третього степеня на рівномірній сітці, що задовольняють граничні умови (4) [1]. Підставляючи вирази (6) у розв'язувальні рівняння (3) і умови симетрії (5), вимагаємо, щоб отримана система і граничні умови точно задовольнялися в $N + 1$ точці колокації s_i вздовж твірної. Як результат отримуємо одновимірну крайову задачу, яку можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}}{d\theta} &= A\bar{z} + \bar{f}; \\ B_1\bar{z} &= \bar{b}_1 \quad (\theta = \theta_1), \quad B_2\bar{z} = \bar{b}_2 \quad (\theta = \theta_2), \end{aligned} \quad (7)$$

де $\bar{z} = \{\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_N, \bar{y}'_0, \dots, \bar{y}'_N\}$ — вектор-функція від θ ; \bar{f} — вектор правих частин; A — квадратна матриця, елементи якої залежать від θ ; B_1 та B_2 — матриці граничних умов; \bar{b}_1 і \bar{b}_2 — відповідні вектори. Одновимірна крайова задача (7) розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [1]. Після підстановки значень \bar{y}_i в (6) одержимо розв'язок двовимірної крайової задачі.

На основі викладеного підходу проведемо аналіз напруженого стану циліндричних оболонок з поперечним перерізом, що задається рівнянням (1). Спочатку проаналізуємо вплив параметра частоти гофрування на прогини і напруження замкненої трансверсально ізотропної оболонки сталої товщини з такими параметрами: $r_0 = 15$, $L = 30$, $\alpha = 0,1$, товщина $h = 1$, модуль Юнга E , модулі зсуву $G_{s\gamma} = G_{\theta\gamma} = G' = E/40$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$. На оболонку діє рівномірно розподілене навантаження $q_\gamma = q_0$.

На рис. 1 та 2 показано розподіл прогинів w та напружень σ_θ^+ на зовнішній поверхні оболонки залежно від частоти гофрування в перерізі $s = l/2$.

Як видно з графіків, що зображені на рис. 1, максимальні прогини можна спостерігати при $\theta = \pi/m$ для всіх трьох випадків частоти. Найбільші значення прогину спостерігаються при $m = 4$. Зі збільшенням m максимальний прогин зменшується. У вершині гофра найбільші прогини при $m = 12$. Як впливає з рис. 1, при збільшенні частоти гофрування коливання між максимальним і мінімальним значенням прогину зменшується. Так при

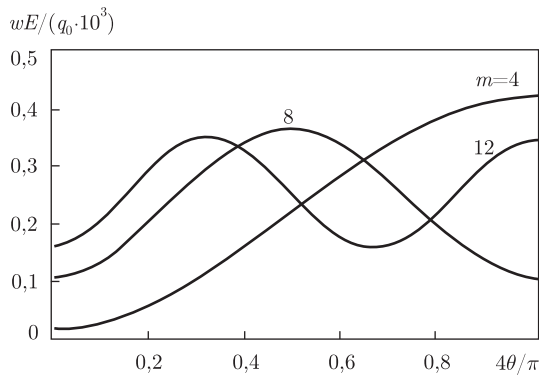


Рис. 1. Розподіл прогинів вздовж напрямної при $s = l/2$

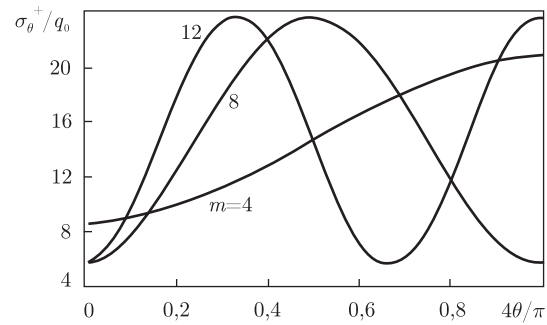


Рис. 2. Розподіл напружень σ_{θ}^{+} вздовж напрямної при $s = l/2$

$m = 4$ значення прогину при $\theta = \pi/4$ перевищує прогин у точці $\theta = 0$ більш ніж у 20 разів, зі збільшенням m до 8 можна побачити, що максимальний прогин більший за мінімальний приблизно в 3,5 рази, у випадку $m = 12$ різниця між прогинами при $\theta = \pi/12$ і у вершині гофра ще менша.

Напруження σ_{θ}^{+} на зовнішній поверхні оболонки наведені на рис. 2. Як видно з графіків, максимальні напруження спостерігаються, так як і прогини, поблизу точки $\theta = \pi/m$, а мінімальні — при вершині. Зі збільшенням m від 4 до 8 максимальні напруження зростають приблизно на 15%. При зміні частоти гофрування від 8 до 12 як найбільші, так і найменші значення напружень мало відрізняються, хоча можна помітити незначне зростання максимальних та спадання мінімальних значень.

Також розв'язано задачу для оболонок з вказаними вище параметрами, у яких товщина змінюється за законом $h = 1 + \beta \cos(m\theta)$. В табл. 1 наведено розподіл прогинів оболонки в серединному перерізі залежно від параметра β . Як видно з таблиці, залежність прогинів від параметра товщини немонотонна для всіх значень θ , що розглядалися. Крім того, максимальні прогини для різних значень θ спостерігаються при різних параметрах β . Наприклад, при $m = 4$ для значень $\theta = \pi/16$ та $\theta = \pi/8$ максимальні прогини досягаються при $\beta = -0,5$, а для інших значень θ , вказаних у таблиці, — при $\beta = 0,5$. Отже, варіюючи параметрами товщини та частоти гофрування оболонки, можна досягти раціональних характеристик її напружено-деформованого стану.

Таблиця 1. Розподіл прогинів залежно від частоти гофрування і параметра зміни товщини

m	$m\theta/\pi$	wE/q_0				
		$\beta = -0,5$	$\beta = -0,25$	$\beta = 0$	$\beta = 0,25$	$\beta = 0,5$
4	0	18,2	14,3	17,7	27,5	46,1
	0,25	127,5	91,0	76,2	74,3	85,1
	0,5	286,2	244,7	221,3	209,7	211,4
	0,75	375,5	359,5	361,6	378,1	415,4
	1	403,1	399,8	419,3	463,3	555,7
8	0	98,7	98,4	106,2	123,4	156,2
	0,25	175,9	150,0	144,0	152,1	178,2
	0,5	297,3	256,3	237,4	233,3	248,0
	0,75	371,3	338,2	327,3	331,2	354,7
	1	395,2	367,6	364,1	379,4	423,6

1. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: ИД «Академперіодика», 2006. – 472 с.
2. Grigorenko Ya. M., Zakhariichenko L. I. Studying the effect of the spatial frequency and amplitude of corrugation on the stress-strain state of cylindrical shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No 12. – P. 1429–1435.
3. Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N. Refined design of corrugated noncircular cylindrical shells // Ibid. – 2005. – **41**, No 1. – P. 7–13.
4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
5. Завьялов Ю. С., Квасов Ю. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
6. Яремченко С. М. Про розв'язання двовимірних крайових задач статички некругових циліндричних оболонок в уточненій постановці із застосуванням сплайн-функцій // Доп. НАН України. – 2007. – № 11. – С. 75–80.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ*

Надійшло до редакції 03.06.2008

S. M. Yaremchenko

Stress-strain state of corrugated shells in refined formulation

The solution of the problem on a stressed state of corrugated cross-section variable thickness cylindrical shells is given using the spline-approximation and discrete orthogonalization methods. The influence of the corrugation frequency on the fields of displacements and stresses is investigated.