Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

4 • 2009

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.318.3

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

К анализу энергии движения якоря электромагнитного вибровозбудителя

Наводяться аналітичні залежності між роботою, що проводиться в електромагнітному віброзбуджувачі, та вхідною електричною енергією.

Некоторые особенности энергетического баланса силовых электромагнитных механизмов (ЭМ) представлены в работе [1]. Однако электромагнитные вибровозбудители (ЭМВ), несмотря на физическое сходство с ЭМ, например контакторами, имеют свои специфические отличия. Если в ЭМ воздушный зазор δ при включенном ЭМ может быть равным нулю, то в ЭМВ воздушный зазор $\delta > 0$. В ЭМ в динамическом режиме δ изменяется от δ_0 до нуля (включение ЭМ) и от нуля до δ_0 (выключение ЭМ). В ЭМВ воздушный динамический зазор

$$\delta = \delta_0 - x_{\text{см}} \pm x(t), \tag{1}$$

где δ_0 — начальный воздушный зазор (ЭМВ не включен); $x_{\text{см}} = x_{0p} + x_{0F}$; x_{0p}, x_{0F} — постоянные смещения якоря ЭМВ от действия веса якоря с весовой нагрузкой $P_{\text{я}}$ и от действия постоянной составляющей тягового усилия F_0 соответственно; $x(t)$ — колебания якоря; t — время.

Кроме того, ЭМВ конструктивно отличается от ЭМ тем, что в его конструкции может быть реактивная масса (РМ) со своими пружинами ($\text{Пр}_{\text{р}}$). Якорь (Я) также подвешен на пружинах $\text{Пр}_{\text{я}}$. Далее в ЭМВ воздушный зазор δ при вибрировании якоря все время изменяется. Так, если вибрация якоря

$$x_{\text{я}}(t) = x_{\text{ая}} \sin(\omega_{\text{я}} t - \varphi_{\text{я}}), \tag{2}$$

где $x_{\text{ая}}$ — амплитуда колебаний якоря; $\omega_{\text{я}}$ — круговая частота колебаний якоря; $\phi_{\text{я}}$ — угол сдвига между переменной составляющей $F_{\sim}(t)$ тягового усилия в ЭМВ и колебаниями $x_{\text{я}}(t)$, то с учетом (2) выражение (1) примет вид

$$\delta = \delta_0 - x_{0P} - x_{0F} \pm x_{\text{ая}} \sin(\omega_{\text{я}} t - \varphi_{\text{я}}). \tag{3}$$

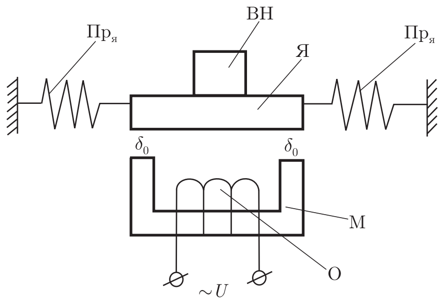

Рис. 1

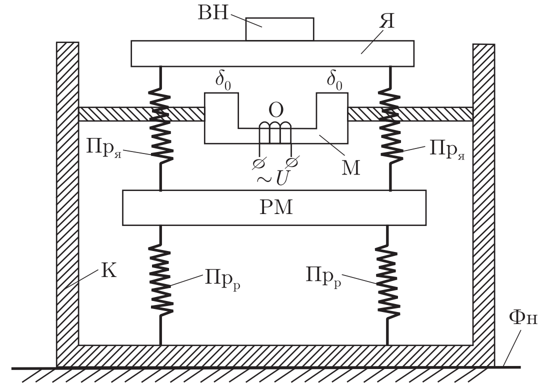

Рис. 2

Из (3) видно, что для того чтобы не было уменьшения δ до нуля, необходимо выполнить условие

$$\delta_0 - x_{0P} - x_{0F} - x_{\text{ая}} > 0, \tag{4}$$

в противном случае якорь будет ударять магнитопровод ЭМВ. Для более детального анализа энергии движения якоря ЭМВ представим на рис. 1, 2 электромагнитомеханические схемы ЭМВ без РМ (рис. 1) и с РМ (рис. 2), где Я — якорь; ВН — весовая нагрузка; М — магнитопровод; О — электрическая обмотка; Пр$_{\text{я}}$, Пр$_{\text{р}}$ — пружины; δ_0 — начальный воздушный зазор; U — задающее напряжение; $U(t) = U_a \sin \omega t$ (U_a — амплитуда).

Под действием $U(t)$ в обмотке О идет электрический ток $i(t) = I_a \sin(\omega t - \varphi)$, где $I_a = U_a/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\varphi = \operatorname{arctg}(\omega L/R)$ — угол сдвига между $U(t)$ и $i(t)$; R — активное сопротивление цепи обмотки О совместно с источником $U(t)$; L — индуктивность в ЭМВ; ω — круговая частота $U(t)$. Заметим, что если $\omega L \gg R$, то $U(t)$ является выходом источника напряжения, если $R \gg \omega L$, то источник $U(t)$ является источником тока. В зависимости от этих источников $U(t)$ или $i(t)$ энергетические соотношения в ЭМВ будут разными. В данной работе рассмотрим и этот вопрос. Процедуру анализа энергии в ЭМВ будем осуществлять последовательно: вначале для ЭМВ без РМ, а затем для ЭМВ с РМ.

Рассмотрим ЭМВ без РМ (рис. 1).

Пусть R и ωL согласуются, тогда энергия, входящая в ЭМВ, записывается выражением

$$W_\Sigma = \int\limits_0^t U(t) i(t) = \int\limits_0^t U_a \sin \omega t I_a \sin(\omega t - \varphi) dt =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{U_a^2}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt. \tag{5}$$

В (5) используем тригонометрические преобразования [2]

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Тогда (5) примет вид

$$W_\Sigma = \frac{U_a^2 t \cos \varphi}{2\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} - \frac{U_a^2}{4\omega\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(2\omega t - \varphi). \tag{6}$$

Как видно из (6), входная энергия W_Σ распределена на две составляющие

$$W_{\Sigma 1} = \frac{U_a^2 t\cos\varphi}{2\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}, \qquad W_{\Sigma 2} = -\frac{U_a^2\sin(2\omega t-\varphi)}{4\omega\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}.$$

$W_{\Sigma 1}$ линейно увеличивается с увеличением t, а $W_{\Sigma 2}$ осциллирует с частотой 2ω, являясь вычитаемой из $W_{\Sigma 1}$. В свою очередь

$$W_{\Sigma 2} = -\frac{U_a^2}{4\omega\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}(\sin 2\omega t\cos\varphi + \cos 2\omega t\sin\varphi).$$

При $R \gg \omega L$ $\varphi = 0$ и

$$W_{\Sigma 1} = \frac{U_a^2 t}{2R}, \qquad W_{\Sigma 2} = -\frac{U_a^2\sin 2\omega t}{4\omega R}.$$

При $R \ll \omega L$ $\varphi = \pi/2$ и

$$W_{\Sigma 1} = 0, \qquad W_{\Sigma 2} = -\frac{U_a^2\cos 2\omega t}{4\omega^2 R}.$$

Как видим, в этом случае $W_{\Sigma 2}$ — реактивная энергия. Энергия W_Σ распределяется в ЭМВ на энергию потерь $W_\text{П}$ и энергию кинетическую $W_\text{К}$. Энергия $W_\text{П}$ — это энергия, рассеиваемая в виде тепла на $R(W_\text{Т})$, в виде энергии, создающей вихревые токи $W_\text{В}$, в виде энергии, идущей на трение движущихся частей ЭМВ о воздух. Тепловая энергия рассеивания

$$W_\text{Т} = \int\limits_0^t Ri^2(t)dt = RI_a^2\int\limits_0^t \sin^2(\omega t-\varphi)dt = \frac{1}{2}RI_a^2 t - \frac{1}{4\omega}RI_a^2\sin 2(\omega t-\varphi) \qquad (7)$$

также имеет нарастающую составляющую и отрицательную осциллирующую с частотой 2ω.

При $R \gg \omega L$

$$W_\text{Т} = \frac{1}{2}\frac{U_a^2}{R}t - \frac{1}{4\omega}\frac{U_a^2}{R}\sin 2\omega t,$$

при $R \ll \omega L$, т. е. при $R \approx 0$ $W_\text{Т} \approx 0$ (см (7)).

Вследствие того, что магнитопровод и якорь состоят из шихтованных пластин, а ВН изолирована от Я немагнитным материалом, можно считать, что вихревые токи в ЭМВ малы, а также малы потери на гистерезис из-за наличия в ЭМВ постоянного воздушного зазора. Поэтому входная энергия W_Σ расходуется в ЭМВ на выделение тепла в R, на смещение x_{0F} якоря и на его вибрацию. При вибрации якоря возникают потери энергии из-за трения движущихся частей (пружин, платформы) о воздух, но они малы (ими можно пренебречь). Таким образом,

$$W_\Sigma = W_\text{Т} + W_e = W_\text{Т} + \frac{1}{2}Li^2(t),$$

где W_e — электрическая энергия, которая расходуется на смещение якоря и на его колебания совместно с ВН.

Баланс электрической энергии записывается выражением

$$\frac{1}{2}Li^2(t) = F_0 x_{0F} + F_\sim x(t). \tag{8}$$

Далее определим F_0, $F_\sim$, x_{0F} и $x(t)$

$$F_0 + F_\sim = F_\Sigma,$$

где F_Σ — полное тяговое усилие в ЭМВ.

Известно [1], что тяговое усилие F_Σ определяется выражением

$$F_\Sigma = \frac{dW_e}{d\delta} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\delta}(Li^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{dL}{d\delta}i^2 + L\frac{di^2}{d\delta}\right). \tag{9}$$

Зная, что [3] $L = w^2 G = w^2\mu_0 S/(2\delta)$, где w — число витков обмотки; G — магнитная проводимость в ЭМВ; μ_0 — магнитная проницаемость воздуха; S — площадь поперечного сечения полюса магнитопровода у воздушного зазора, (9) запишем

$$F_\Sigma = \frac{1}{4}i^2 w^2\frac{\mu_0 S}{\delta^2} + \frac{1}{2}w^2\frac{\mu_0 S}{2\delta}\frac{di^2}{d\delta}. \tag{10}$$

Подставим в (10)

$$i(t) = I_a\sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_a}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_a\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{\omega\mu_0 S w^2}{2\delta}\right)^2}}.$$

Заметим, что угол φ имеет значение в переходном процессе электроцепи ЭМВ. В установившемся значении тока $i(t)$ этот угол φ можно опустить. Тогда

$$i(t) = \frac{U_a\sin\omega t}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{\omega\mu_0 S w^2}{2\delta}\right)^2}}.$$

Подставим эту величину тока в (10). Получим

$$F_\Sigma = \left(\frac{w}{2\delta}\right)^2\mu_0 S\frac{U_a^2\sin^2\omega t}{R^2 + \left(\dfrac{\mu_0 S w^2\omega}{2\delta}\right)^2} + \frac{\mu_0 S}{4\delta}w^2\left\{\frac{8\delta U_a^2\sin^2\omega t}{(2\delta R)^2 + (\omega\mu_0 S w^2)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{32U_a^2\delta^3 R^2\sin 2\omega t}{[(2\delta R)^2 + (\omega\mu_0 S w^2)^2]^2}\right\} = [J - V + Q + (Q - J - V)\cos 2\omega t], \tag{11}$$

где

$$Q = \frac{1}{2}\mu_0 S\left(\frac{U_a w}{2\delta}\right)^2\left[R^2 + \left(\frac{\mu_0 S w^2\omega}{2\delta}\right)^2\right]^{-1};$$

$$J = \mu_0 S(wU_a)^2[(2\delta R^2) + (\omega\mu_0 S w^2)^2]^{-1}; \qquad V = 2\mu_0 S(U_a\delta R^2)[(2\delta R)^2 + (\omega\mu_0 S w^2)^2]^{-2}.$$

Из (11) видно, что постоянная составляющая $F_0 = J - V + Q$, а переменная $F_{\sim} = (Q - - J - V)\cos 2\omega t = F_a \cos 2\omega t$.

Теперь для (8) необходимо получить x_{0F} и $x(t)$, а для (9) еще и x_{0P}. Для этого запишем дифференциальное уравнение движения якоря в ЭМВ. Подвижная система ЭМВ представляет собой колебательную систему с одной степенью свободы. Поэтому ее уравнение движения следующее:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = F_\Sigma + P_{я}. \tag{12}$$

Здесь m — масса якоря; b, c — коэффициенты диссипации и упругости соответственно.

Смещения $x_{0P} = P_{я}/c$, $x_{0F} = F_0/c$; переменное $x(t) = x_a \cos(2\omega t - \Psi)$, где [4]

$$x_a = \frac{F_a}{m\sqrt{(4\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\dfrac{2b\omega}{m}\right)^2}}, \qquad \Psi = \operatorname{arctg}\frac{b\omega}{m(4\omega^2 - \omega_0^2)},$$

где $P_{я}$ — вес якоря + ВН; ω_0 — собственная частота колебаний якоря.

Исходя из полученного решения (12), выражение (8) с учетом (11) примет вид

$$\frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{4}L\left[\frac{U_a^2}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{U_a^2}{R^2 + (\omega L)^2}\cos 2\omega t\right] =$$
$$= (J - V + Q)^2\frac{1}{c} + \frac{(Q - J - V)^2\cos(2\omega t - \Psi)\cos 2\omega t}{m\sqrt{(4\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\dfrac{2b\omega}{m}\right)^2}}. \tag{13}$$

Как видим из (13), постоянная составляющая электрической энергии

$$\frac{1}{4}L\left[\frac{U_a^2}{R^2 + (\omega L)^2}\right]$$

создает работу смещения якоря в виде

$$(J - V + Q)^2\frac{1}{c},$$

а переменная составляющая энергии

$$\frac{1}{4}L\frac{U_a^2}{R^2 + (\omega L)^2}\cos 2\omega t$$

равна работе осцилляции якоря в виде

$$\frac{(Q - J - V)^2\cos(2\omega t - \Psi)\cos^2 2\omega t}{m\sqrt{(4\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\dfrac{2b\omega}{m}\right)^2}}.$$

При $R \ll \omega L$, т. е. считаем $R \approx 0$

$$\left.\begin{aligned} F_\Sigma &= \frac{1}{\mu_0 S}\left(\frac{U_a}{\omega w}\right)^2 (1 - \cos 2\omega t) = F_0 - F_\sim; \\ F_0 &= \frac{1}{\mu_0 S}\left(\frac{U_a}{\omega w}\right)^2; \\ F_\sim &= \frac{1}{\mu_0 S}\left(\frac{U_a}{\omega w}\right)^2 \cos 2\omega t = F_a \cos 2\omega t, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где $F_a = \dfrac{1}{\mu_0 S}\left(\dfrac{U_a}{\omega w}\right)^2$.

Подставляя в (13) выражение (14) при $R \approx 0$, получим

$$\frac{1}{2} L i^2(t) = \left(\frac{1}{\mu_0 S}\right)^2 \left(\frac{U_a}{\omega w}\right)^4 \frac{1}{c} - \frac{\left(\dfrac{1}{\mu_0 S}\right)^2 \left(\dfrac{U_a}{\omega w}\right)^4 \cos(2\omega t - \Psi)\cos 2\omega t}{m^2\left[(4\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\dfrac{2b\omega}{m}\right)^2\right]}. \tag{15}$$

Из (15) видно, что постоянная составляющая

$$\left(\frac{1}{\mu_0 S}\right)^2 \frac{1}{c} \left(\frac{U_a}{\omega w}\right)^4$$

осуществляет постоянное смещение якоря x_{0F}, а переменная составляющая

$$\left(\frac{1}{\mu_0 S}\right)^2 \left(\frac{U_a}{\omega w}\right)^4 \cos(2\omega t - \Psi) \frac{\cos^2 2\omega t}{m^2\left[(4\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\dfrac{2b\omega}{m}\right)^2\right]}$$

осуществляет колебания якоря $x_a \cos(2\omega t - \Psi)$.

При $R \gg \omega L$

$$F_\Sigma = \mu_0 S \left(\frac{iw}{2\delta}\right)^2 = \mu_0 S \left(\frac{I_a w}{2\delta}\right)^2 \sin^2 \omega t = \mu_0 S \left(\frac{U_a w}{2R\delta}\right)^2 \sin^2 \omega t = F_{\Sigma a}(1 - \cos 2\omega t), \tag{16}$$

где $F_{\Sigma a} = \mu_0 S \left(\dfrac{U_a w}{2R\delta}\right)^2$.

Из (16) вытекает, что

$$F_0 = \mu_0 S \left(\frac{U_a w}{2R\delta}\right)^2; \qquad F_\sim = -\mu_0 S \left(\frac{U_a w}{2R\delta}\right)^2 \cos 2\omega t.$$

В этом случае видно, что энергия

$$(\mu_0 S)^2 \left(\frac{U_a w}{2R\delta}\right)^4 \frac{1}{c},$$

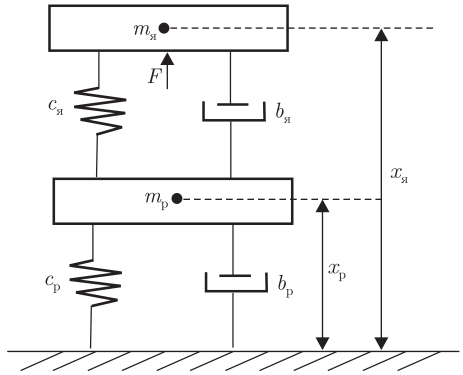

Рис. 3

являясь постоянной величиной, осуществляет смещения якоря x_{0F}, а переменная составляющая энергии создает вибрацию якоря в ЭМВ

$$\frac{1}{4}L\left(\frac{U_a}{R}\right)^2\cos 2\omega t,$$

т. е. создает колебания якоря, совершающего работу

$$(\mu_0 S)^2\left(\frac{U_a w}{2R\delta}\right)^4\frac{\cos 2\omega t\cos(2\omega t-\varphi)}{m^2\left[(4\omega^2-\omega_0^2)^2+\left(\dfrac{2b\omega}{m}\right)^2\right]}.$$

При рассмотрении ЭМВ с РМ баланс электрической энергии записывается выражением

$$\frac{1}{2}Li^2(t)=F_0(x_{я0}+x_{р0})+F_\sim[x_я(t)+x_p(t)], \tag{17}$$

где $x_{я0}$, $x_{р0}$ — постоянные смещения якоря и реактивной массы соответственно от действия постоянной составляющей F_0 тягового усилия; $x_я(t)$, $x_р(t)$ — переменные перемещения якоря и РМ соответственно от действия переменной составляющей $F_\sim$ тягового усилия. Так как для F_0 и $F_\sim$ выведены аналитически в (11), то для конкретизации (17) определим для ЭМВ с РМ величины $x_{я0}$, $x_{р0}$, $x_я(t)$, $x_р(t)$. Для этого на рис. 3 представим механическую схему ЭМВ с РМ, где $m_я$, m_p — массы якоря + ВН и РМ соответственно; $c_я$, c_p — коэффициенты жесткости пружин $Пр_я$ и $Пр_р$ соответственно; $b_я$, b_p — коэффициенты диссипации.

Как видно из рис. 3, колебательная система (КС) ЭМВ с РМ является КС с двумя степенями свободы. Дифференциальные уравнения движения этой КС следующие:

$$\left.\begin{aligned} m_я\frac{d^2x_я}{dt^2}+b_я\frac{dx_я}{dt}+c_я x_я=F_0+F_\sim+P_я+b_я\frac{dx_p}{dt}+c_я x_р,\\ m_p\frac{d^2x_p}{dt^2}+(b_я+b_p)\frac{dx_p}{dt}+(c_я+c_p)x_p=P_\Sigma+b_я\frac{dx_я}{dt}+c_я x_я,\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где $P_р$ — вес РМ; $P_\Sigma=P_я+P_p$.

Как видно из (18), Я и РМ постоянно смещены на $x_{я0p}$, $x_{р0p}$ от действия их весов $P_я$ и P_Σ и также смещаются в воздушном зазоре δ_0 на $x_{я0F}$, $x_{р0F}$ от действия постоянной составляющей F_0 тягового усилия в ЭМВ с РМ и сил влияния Я и РМ друг на друга, т. е. суммарные смещения Я и РМ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x_{я0\Sigma} &= x_{я0p} + x_{р0p}, \\ x_{я0А} &= x_{я01} + x_{р0xp}, \\ x_{p0\Sigma} &= x_{p0p} + x_{р0xя}, \end{aligned}\right\}$$

где

$$x_{я0р} = \frac{P_я}{c_я}; \qquad x_{я01} = \frac{F_0}{c_я}; \qquad x_{я0xр} = \frac{c_я x_{p0F}}{c_я}; \qquad x_{p0p} = \frac{P_\Sigma}{c_я + c_p}; \qquad x_{p0xя} = \frac{c_я x_{я0F}}{c_я + c_р}.$$

Выражения $x_{я0p}$ и $x_{р0p}$ в функции коэффициентов $c_я$, $c_р$ и весов $P_я$, P_Σ следующие:

$$x_{я0p} = P_я\left(\frac{1}{c_р} + \frac{1}{c_я}\right) + \frac{P_\Sigma}{c_р};$$

$$x_{р0p} = \frac{1}{c_я + c_р}\left\{P_\Sigma + c_я\left[P_я\left(\frac{1}{c_р} + \frac{1}{c_я}\right) + \frac{P_\Sigma}{c_р}\right]\right\}.$$

Величины смещений $x_{я0F}$, $x_{р0F}$ имеют аналитический вид

$$x_{я0F} = F_0\left(\frac{1}{c_я} + \frac{1}{c_р}\right), \qquad x_{р0F} = \frac{F_0}{c_p}. \tag{19}$$

Переменные величины $x_я(t)$, $x_р(t)$ определяются в виде

$$\left.\begin{aligned} x_я(t) &= x_{aя}\cos(2\omega t - \Psi), \\ x_p(t) &= x_{ap}\cos(2\omega t - \Psi - \Psi_p), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где $\Psi_р$ — угол сдвига между $x_я(t)$ и $x_р(t)$; $\Psi_p = \operatorname{arctg}(b_я + b_p)\omega/(m_p(4\omega^2 - \omega_p^2))$, выражение для Ψ дано ранее.

Амплитуды $x_{aя}$, x_{ap} записываются соотношениями

$$x_{aя} = \frac{|F_\sim + b_я\dot{x}_p(t) + c_я x_p(t)|}{m_я\left[(4\omega^2 - \omega_{0я}^2)^2 + \left(\dfrac{2b_я\omega}{m_я}\right)^2\right]},$$

$$x_{ap} = \frac{|b_я\dot{x}_я(t) + c_я x_я(t)|}{m_р\left[(4\omega^2 - \omega_{0р}^2)^2 + \left[\dfrac{2\omega(b_я + b_р)}{m_р}\right]^2\right]}.$$

Здесь $\dot{x} = dx/dt$; $\omega_{0я}$, $\omega_{0р}$ — собственные частоты колебаний якоря и РМ соответственно.

Подставляя в (20) аналитические выражения (11), (19), (20), получим баланс электрической энергии в ЭМВ с РМ. Причем правая часть (17) является конкретизацией произведенной работы в ЭМВ с РМ от действия электрической энергии $W_e = (1/2)Li^2(t)$.

Таким образом, в результате проведенного исследования показано, какие части энергии в ЭМВ расходуются на потери, какие части электрической энергии совершают работу якоря по смещению его в зазоре и какие части расходуются на создание вибрации якоря. Для всех указанных составляющих выведены аналитические выражения.

1. *Любчик М. А.* Оптимальное проектирование силовых электромагнитных механизмов. – Москва: Энергия, 1974. – 392 с.
2. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 608 с.
3. *Ступель Ф. А.* Электромеханические реле. – Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1956. – 355 с.
4. *Божко А. Е., Голуб Н. М.* Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 03.03.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

To the analysis of the rotor motion energy of an electromagnetic vibroexciter

The analytical relations between the work and the input electrical energy in an electromagnetic vibroexciter are given.