

А. И. Якимчик

## Об эффективном методе построения линейных аналитических аппроксимаций в гравиметрии (локальный вариант)

(Представлено академиком НАН Украины В. И. Старостенко)

*Запропоновано метод побудови лінійних аналітичних апроксимацій (у локальному варіанті) поля сили тяжіння за даними на поверхні Землі. На підставі використання лінійної аналітичної апроксимації поля можливе знаходження набору лінійних трансформацій аномального поля.*

Целью данного сообщения является демонстрация эффективности предлагаемого метода построения линейных аналитических аппроксимаций в локальном варианте (когда сферичностью Земли можно пренебречь) на примере расчетов, выполненных на практическом материале.

Структура работы следующая. В первом разделе рассматривается постановка задачи, во втором — характеризуются исходные материалы. В третьем разделе приводится краткое описание вычислительной схемы метода. В четвертом разделе излагаются результаты расчетов и выводы.

**1. Постановка задачи.** Будем использовать прямоугольную декартовую систему координат с осью  $Oz$  вверх<sup>1</sup> (рис. 1). Рассмотрим проблему построения линейных аналитических аппроксимаций элементов внешнего аномального гравитационного поля Земли по заданным на ее физической поверхности  $\partial G$  значениям  $\Delta g_{i,\delta} = \Delta g_i + \delta\Delta g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Речь идет о построении функции  $\Delta g_{\text{анпр}}(x, y, z) \approx \Delta g(x, y, z)$  по совокупности величин  $\Delta g_{i,\delta}$ , где  $\Delta g_i = \Delta g(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , а  $\delta\Delta g_i$  — погрешности в заданных значениях  $\Delta g_{i,\delta}$ .

Исходное поле приближается с помощью вычислительной конструкции [1, 2]

$$\Delta g_{\text{анпр}}(x, y, z) = \sum_{j=1}^n \frac{10^5 \cdot c_j (z + z^{(j)})}{[(x - x^{(j)})^2 + (y - y^{(j)})^2 + (z + z^{(j)})^2]^{3/2}}, \quad (1)$$

где  $z^{(j)} = h + z^{(i)}$ ;  $h$  — параметр вычислительной схемы [3] (в расчетах —  $h = 500$  м);  $c_j$  — некоторые коэффициенты. Причем  $x, y, z, h$  имеют размерность — м,  $\Delta g$  — мГал. Следует заметить, что в Международной системе единиц (СИ) ускорение свободного падения выражается в  $\text{м}/\text{с}^2$ , а в гравиразведке применяется меньшая единица — миллигал (мГал), равная  $10^{-5} \text{ м}/\text{с}^2$ . Поэтому, принимая во внимание единицы измерения, в (1) присутствует коэффициент  $10^5$ .

<sup>1</sup>Необходимо иметь в виду, что система координат с осью  $Oz$  вверх употребляется, кроме всего прочего, в теории трансформаций, хотя в теории прямых и обратных задач гравиметрии используется система координат с осью  $Oz$  вниз (исключение составляет плоская задача, разрабатываемая методами теории функций комплексной переменной, в которой также используется система с осью  $Oz$  вверх).

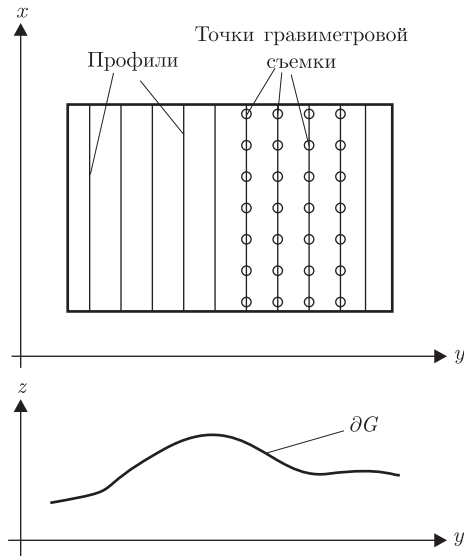


Рис. 1. К постановке задачи построения линейной аналитической аппроксимации поля  $\Delta g(x, y, z)$  в локальном варианте

Значения  $c_j$  определяются из решения симметричной системы линейных алгебраических уравнений

$$Ac = \Delta g_\delta = \Delta g + \delta \Delta g, \quad (2)$$

где  $A = [a_{ij}]$  — квадратная матрица, элементы которой определяются по формуле

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{10^5}{(z^{(i)} + z^{(j)})^2 \left[ 1 + \left( \frac{x^{(i)} - x^{(j)}}{z^{(i)} + z^{(j)}} \right)^2 + \left( \frac{y^{(i)} - y^{(j)}}{z^{(i)} + z^{(j)}} \right)^2 \right]^{3/2}}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (3)$$

**2. Характеристика исходных материалов.** В качестве исходных данных использовались 796 значений аномалий Буге, прямоугольных координат и высот, которые взяты из авторских каталогов [4]. Детальные гравиметровые работы масштаба 1 : 50000 проводились на площади 200 км<sup>2</sup> (в пределах планшетов L-37-5 и L-37-17), ограниченной координатами (рис. 2):

- 1) 47°42'15" с. ш. и 38°08'15" в. д.;      2) 47°42'15" с. ш. и 38°20'00" в. д.;
- 3) 47°35'10" с. ш. и 38°20'00" в. д.;      4) 47°35'10" с. ш. и 38°08'15" в. д.

Район работ представляет собой холмистую равнину, наклоненную к юго-востоку и расчлененную долинами рек, балками и оврагами. Донецк расположен к северо-западу от участка на расстоянии 56 км. Абсолютные отметки дневной поверхности колеблются от 40 до 180 м. Профили задавались в меридиональном направлении.

Сведения о съемке, результаты которой использованы при построении линейной аналитической аппроксимации, приведены в табл. 1.

**3. Методика вычислений.** Если в системе линейных уравнений (2) матрица (3) является положительно определенной, то для ее решения целесообразно использовать разло-

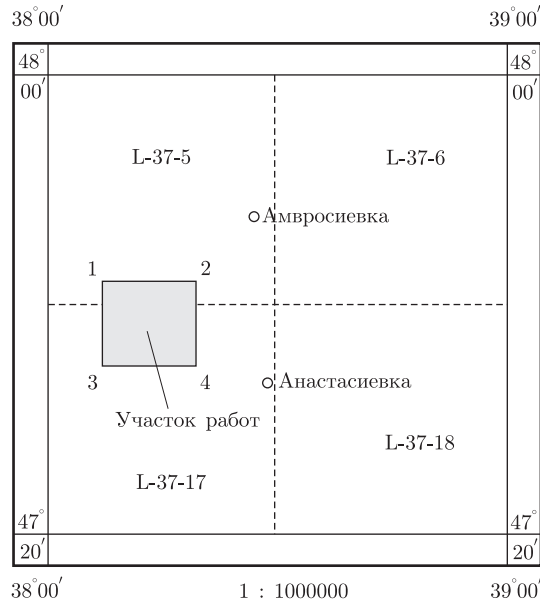


Рис. 2. Схема использованного гравиметрического материала

жение Холецкого [5, 6], которое предусматривает представление матрицы  $A$  в виде произведения<sup>2</sup>:

$$A = LL^T, \quad (4)$$

где  $L^T$  — матрица, транспонированная к  $L$ , на главной диагонали которой находятся положительные элементы. Определим элементы матрицы  $L$ , сравнивая каждый элемент матрицы в левой и правой части (4). Имеем

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{1n} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & \dots & l_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & l_{nn} \end{pmatrix},$$

откуда получаем равенства для первого столбца

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Аналогично находим соотношения

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^i l_{ik}^2, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} l_{jk}, \quad j < i,$$

которые приводят к формулам

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

<sup>2</sup>По методу Холецкого, матрицу  $A$  можно представить в виде произведения  $R^T R$ , где  $R$  — верхняя треугольная матрица.

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{ii}}, \quad j+1 \leq i \leq n.$$

После того как выполнено разложение (4), решение системы (2) получается решением двух систем с треугольными матрицами:

$$Lq = \Delta g_{\delta} \quad \text{и} \quad L^T c = q.$$

Известно, что в точной арифметике для симметричной положительно определенной матрицы существует разложение Холецкого. И, наоборот, если процесс Холецкого может быть реализован со строго положительными квадратными корнями, значит, матрица  $A$  положительно определена. Таким образом, чтобы выяснить, является ли матрица  $A$  положительно определенной, просто пытаемся вычислить ее разложение Холецкого.

Вычисления производились с использованием подпрограмм библиотеки IMSL, которая является неотъемлемой частью профессиональных версий Fortran PowerStation и Compaq Visual Fortran. Фортран-программы для решения симметричных положительно определенных систем имеются также в пакете LINPACK.

**4. Результаты расчетов и заключение.** По заданным точкам на основании выражения (3) была вычислена матрица  $A$  размерности  $796 \times 796$ , найдено  $R^T R$  — разложение и выполнена оценка ее числа обусловленности:  $\text{cond}_1(A) = 386,7$ . Попутно были вычислены матричные нормы: норма Фробениуса  $\|A\|_F = 8,9$  и  $\|A\|_1 = \|A\|_{\infty} = 2,3$ . Далее по найденному разложению решалась система (2). По формуле (1) вычислялись значения  $\Delta g_i^{(\text{выч})} = \Delta g(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})$  и сравнивались с заданными значениями  $\Delta g_{i,\delta}$ . Максимальное по модулю расхождение между наблюдаемым и вычисленным значением составило:  $\max |\Delta g_i - \Delta g_i^{(\text{выч})}| = 4,3 \cdot 10^{-13}$  мГал,  $i = 499$ .

Таблица 1. Некоторые сведения о съемке Восточно-Приазовской партии Артемовской геофизической экспедиции треста Укргеофизразведка, 1960 (автор отчета — К. М. Шурапей)

Методика работ	на опорной сети	9 пунктов размещены с плотностью 1 пункт на $22 \text{ км}^2$ . Наблюдения выполнены по методике со 100% повторением; на каждом пункте получено не менее трех независимых значений. Уравнивание выполнено методом узлов; $\varepsilon_{\text{оп}} = \pm 0,21$ мГал
	на рядовой сети	Рядовые точки в количестве 1100 размещены на площади $200 \text{ км}^2$ по сети $500 \times 500$ м и на участках детализации по сети $250 \times 250$ м. Наблюдения выполнены в основном с 30%-м повторением и частично со 100%-м повторением. Каждый рейс включал несколько точек предыдущего рейса. По данным контроля $\varepsilon_{\text{ряд}} = \pm 0,17$ мГал
	топографо-геодезических	Меридиональные магистрали проложены через 3 км теодолитными ходами; привязка их к пунктам триангуляции и пунктам сгущения опорной геодезической сети выполнена теодолитными ходами. Профили проложены через 500 м инструментально, шаг по профилю 500 м, $\varepsilon_{\text{пл}} = \pm 80$ м. Высоты 795 пунктов сняты с карт масштаба 1 : 10000 с сечением 2,5 м. Высоты пунктов, расположенных на местности с уклоном более $2^\circ$ , определены техническим нивелированием; $\varepsilon_{\text{в}}$ не превышает $\pm 0,3$ м

Примечание.  $\varepsilon_{\text{оп}}$  и  $\varepsilon_{\text{ряд}}$  — средние квадратичные погрешности определения наблюдаемого значения силы тяжести на опорном пункте и рядовой точке;  $\varepsilon_{\text{пл}}$  и  $\varepsilon_{\text{в}}$  — средние квадратичные ошибки определения планового положения и высоты пунктов наблюдений.

В заключение коротко о том, какие задачи могут решаться с помощью найденной аналитической аппроксимации поля. Приведем некоторые основные типы задач [1]: а) нахождение значений  $\Delta g(x, y, z)$  на горизонтальных плоскостях  $z = \text{const} > 0$ , а также построение изолиний поля  $\Delta g$  на этих плоскостях (здесь особо стоит выделить пересчеты на горизонтальные поверхности ниже поверхности  $\partial G$ ); б) нахождение в узлах регулярных сетей на горизонтальных плоскостях  $z = \text{const} > 0$  других элементов внешнего аномального гравитационного поля, в первую очередь — вторых производных от потенциала аномального поля (и опять-таки построение на указанных плоскостях изолиний новых элементов аномального гравитационного поля); в) нахождение спектральных представлений поля  $\Delta g(x, y, z)$ ; здесь имеются в виду представления интегралами Фурье; г) нахождение значений различного рода линейных функционалов от поля  $\Delta g(x, y, z)$ , например интегралов (с различными весами) по плоскостям, расположенным выше поверхности  $\partial G$ .

1. Страхов В. Н. Об эффективных по быстродействию и точности методах построения линейных аналитических аппроксимаций в геодезии, геоинформатике и гравиметрии // Геофиз. журн. — 2007. — 29, № 1. — С. 56–84.
2. Гравиразведка: Справочник геофизика. — Москва: Недра, 1990. — 607 с.
3. Аронов В. И. Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. — Москва: Недра, 1990. — 301 с.
4. Шурапей К. М. Отчет о работах Восточно-Приазовской геофизической партии за 1960 г. Ч. V. Табличные приложения гравиметровой съемки. — Київ: Фонди ДНВП “Геоінформ України”, 1961. — С. 4–47.
5. Икрамов Х. Д. Численные методы для симметричных линейных систем. — Москва: Наука, 1988. — 160 с.
6. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — Москва; Ленинград: Физматгиз, 1963. — 734 с.
7. Бартьев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч. 1. — Москва: Диалог-МИФИ, 2000. — 448 с.

*Институт геофизики им. С. И. Субботина  
НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 04.07.2008*

**A. I. Yakimchik**

### **On an efficient method of construction of linear analytical approximations in gravimetry (local variant)**

*A method of construction of linear analytical approximations (local variant) of the gravity field from data measured on Earth's surface is proposed. Using the linear analytical approximation of the field, it is possible to find a set of linear transformations of an anomalous field.*