Доповіді національної академії наук України

5 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 517.581

Н. О. Вірченко, О. М. Лисецька, О. В. Овчаренко

До теорії узагальнених функцій гіпергеометричного типу та їх застосування

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Запроваджено нове узагальнення гіпергеометричної функції Гаусса. Досліджено її основні властивості, встановлено деякі диференціальні, інтегральні співвідношення. Подано деякі застосування, зокрема, інтегральне рівняння Вольтерра розв'язано в замкненій формі.

Актуальність дослідження функцій гіпергеометричного типу пояснюється не тільки тим, що багато спеціальних функцій, наприклад функції Бесселя, Лежандра, параболічного циліндру тощо, можна розглядати як частинні випадки, але й тим, що вони відіграють вагому роль у різноманітних питаннях фізики, механіки, астрофізики, квантової теорії поля, біомедицини і самої математики [1–6] та ін. Серед спеціальних функцій особливе місце займають гіпергеометрична функція Гаусса, E-функція Мак-Роберта, G-функція Мейєра, функції Ларічелла та ін. В останні десятиріччя для практичних застосувань виявились важливими узагальнені гіпергеометричні функції за Райтом [7–9], зокрема, в [10] розглянуто (τ, β)-узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса

$$ {}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a,1);(c,\tau); \\ (c,\beta); \end{matrix} \middle| zt^\tau \right] dt, \tag{1} $$

а в [9] — τ-узагальнену вироджену (конфлюентну) гіпергеометричну функцію

$$ {}_1F_1^{\tau}(a;c;z) = {}_1\Phi_1^{\tau}(a;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} e^{zt^\tau}\, dt, \tag{2} $$

(τ, β)-узагальнену вироджену (конфлюентну) гіпергеометричну функцію ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$. Виявилось, що ці функції знаходять застосування при розв'язанні складніших задач математичної фізики, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії кодування, атомної фізики та ін. [6, 11].

У даній роботі запроваджено нове узагальнення гіпергеометричної функції Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$, досліджено її основні властивості, подано деякі застосування.

1. Введемо узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса у вигляді

$$
{}_r\widetilde{F}(a, b; c; z) = {}_r\widetilde{F}(z) \equiv
$$

$$
\equiv \frac{1}{B(b, c-b)} \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha; \gamma; -\frac{r}{t(1-t)}\right) dt, \tag{3}
$$

де $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, $r > 0$; $r = 0$, $|z| < 1$; $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, $\{\tau, \beta\} \subset R$, $\tau > 0$, $\tau - \beta < 1$, $B(\ldots)$ — бета-функція [12], ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; z)$ – (τ, β)-узагальнена вироджена (конфлюентна) гіпергеометрична функція [9]:

$$
{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; z) = {}_1F_1^{\tau,\beta}(z) \equiv {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(z) =
$$

$$
= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(c; \tau);\\ (c; \beta);\end{matrix}\,\middle|\, zt^{\tau}\right] dt, \tag{4}
$$

тут ${}_1\Psi_1(z)$ — частинний випадок узагальненої функції Фокса–Райта ${}_p\Psi_q$ [7]:

$$
{}_p\Psi_q(z) = {}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_i; \alpha_i)_{1,p};\\ (b_j; \beta_j)_{1,q};\end{matrix}\,\middle|\, z\right], \tag{5}
$$

$z \in C$; $a_j, b_j \in C$; $\{\alpha_j, \beta_j\} \subset R = (-\infty, +\infty)$, $\alpha_i, \beta_j \neq 0$; $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, q$.

Зауважимо, що для випадку $\beta = \tau$ формула (3) матиме вигляд

$$
{}_r\overset{\approx}{F}(a, b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,{}_1\Phi_1^{\tau}\left(\alpha; \gamma; -\frac{r}{t(1-t)}\right) dt. \tag{6}
$$

Узагальнену вироджену (конфлюентну) гіпергеометричну функцію зобразимо у вигляді

$$
{}_r\widetilde{\Phi}(b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \exp(zt)\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha; \gamma; -\frac{r}{t(1-t)}\right) dt, \tag{7}
$$

де $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$; $r > 0$; ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ — функція, визначена формулою (4). Зауважимо, що при $r = 0$ формули (3), (7) дадуть відповідно класичні функції ${}_2F_1(a, b; c; z)$, $\Phi(a; c; z)$ [12].

Вивчимо основні властивості запроваджених узагальнених функцій гіпергеометричного типу.

Теорема 1 (зображення функції ${}_r\widetilde{F}(z)$ рядом). *Якщо* $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$; $r > 0$; $\{\tau, \beta\} \subset R$; $\tau > 0$, $\tau - \beta < 1$, $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, *то справедлива формула*

$$
{}_r\widetilde{F}(a, b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} (a)_{n\tau,\beta} B_{\alpha}^{\gamma}(b+n, c-b; r) \frac{z^n}{n!}, \tag{8}
$$

де $(a)_n$ *— символ Похгаммера;* ${}_{\tau,\beta}B_\alpha^\gamma$ *— узагальнена бета-функція [13]:*

$$ {}_{\tau,\beta}B_\alpha^\gamma(x,y;r,\delta,\omega) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t^\delta(1-t)^\omega}\right)dt, \qquad (9) $$

тут $\mathrm{Re}\,x > 0$, $\mathrm{Re}\,y > 0$, $r > 0$*;* $\{\tau,\beta\} \subset R$, $\tau > 0$, $\beta > 0$*;* $\delta > 0$, $\omega > 0$, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ *— узагальнена (конфлюентна) гіпергеометрична функція* (4)*.*

Доведення. Використавши (τ,β)-узагальнену бета-функцію (9), її властивості, зображення ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(z)$ рядом [9], можливість перестановки операцій інтегрування та підсумовування, матимемо

$$ {}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt = $$

$$ = \frac{1}{B(b,c-b)\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(a+n)\frac{z^n}{n!}\int\limits_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt = $$

$$ = \frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n{}_{\tau,\beta}B_\alpha^\gamma(b+n,c-b;r)\frac{z^n}{n!}. $$

Наслідок. *Для узагальненої виродженої (конфлюентної) гіпергеометричної функції* ${}_r\widetilde{\Phi}(b;c;z)$ (7) *зображення рядом матиме вигляд*

$$ {}_r\widetilde{\Phi}(b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}{}_{\tau,\beta}B_\alpha^\gamma(b+n,c-b;r)\frac{z^n}{n!}. \qquad (10) $$

Теорема 2 (диференціальні співвідношення для ${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)$). *За умов існування функції* ${}_r\widetilde{F}(z)$ *справедливі формули*

$$ \frac{d\,{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)}{dz} = \frac{ab}{c}\,{}_r\widetilde{F}(a+1,b+1,c+1;z), \qquad (11) $$

$$ \frac{d^n{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)}{dz^n} = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}{}_r\widetilde{F}(a+n,b+n,c+n;z), \qquad (12) $$

$$ z\frac{d}{dz}{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = a({}_r\widetilde{F}(a+1,b,c;z) - {}_r\widetilde{F}(a,b,c;z)), \qquad (13) $$

$$ \frac{d}{dz}(z^a{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)) = z^{a-1}a\,{}_r\widetilde{F}(a+1,b,c;z), \qquad (14) $$

$$ \frac{d^n}{dz^n}(z^{a+n-1}{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)) = (a)_n z^{a-1}{}_r\widetilde{F}(a+n,b,c;z). \qquad (15) $$

Доведення рівностей (11)–(15) здійснюється безпосередньо із використанням формул (3), (8) та за допомогою нескладних перетворень. Наприклад, доведемо (15):

$$ \frac{d^n}{dz^n}({}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)z^{a+n-1}) = $$

$$= \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{B(b,c-b)\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma(a+k)\frac{z^{a+n+k-1}}{k!}{}_{\tau,\beta}B_{\alpha}^{\gamma}(b+k,c-b;r)\right) =$$

$$= \frac{1}{B(b,c-b)\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma(a+k)\,{}_{\tau,\beta}B_{\alpha}^{\gamma}(b+k,c-b;r)\frac{z^{a+k-1}}{k!}\times$$

$$\times(a+n+k-1)(a+n+k-2)\cdots(a+k) = (a)_n z^{a-1}\,{}_r\widetilde{F}(a+n,b;c;z).$$

Зауважимо, що для узагальнених гіпергеометричних функцій ${}_r\widetilde{\widetilde{F}}(a,b;c;z)$, ${}_r\widetilde{\Phi}(b;c;z)$ подібні формули. Подамо одну із них:

$$\frac{d^n}{dz^n}\,{}_r\widetilde{\Phi}(b;c;z) = \frac{(b)_n}{(c)_n}\,{}_r\widetilde{\Phi}(b+n;c+n;z). \tag{16}$$

Теорема 3 (функціональні співвідношення для ${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)$). *За умов існування функції ${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)$ справедливі такі функціональні співвідношення:*

$${}_r\widetilde{F}(a+1,b;c;z) - {}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = \frac{b}{c}z\,{}_r\widetilde{F}(a+1,b+1;c+1;z), \tag{17}$$

$$b\,{}_r\widetilde{F}(a,b+1;c;z) + (c-b-1)\,{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = (c-1)\,{}_r\widetilde{F}(a,b;c-1;z), \tag{18}$$

$${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) - (c-b)\,{}_r\widetilde{F}(a,b;c+1;z) = b\,{}_r\widetilde{F}(a,b+1;c+1;z), \tag{19}$$

$${}_r\widetilde{F}(a,b;c;x+y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{y^n}{n!}\,{}_r\widetilde{F}(a+n,b+n;c+n;x), \tag{20}$$

$${}_r\widetilde{F}(a,b;c;xy) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n(y-1)^n}{n!}\,{}_r\widetilde{F}(a+n,b+n;c+n;x). \tag{21}$$

Доведення формул (17)–(19) виконується безпосередньою перевіркою з використанням формул (3), (8), властивостей B-функції.

Вирази (20), (21) називають теоремами додавання, множення відповідно. При доведенні їх використовується формула (12) та теорема Тейлора [14] про розгорнення аналітичної функції у відповідні ряди.

Теорема 4 (інтегральні зображення функції ${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)$). *За умов існування функції ${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)$ справедливі такі інтегральні зображення:*

$${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{\infty} t^{b-1}(1+t)^{a-c}[1+t(1-z)]^{-a}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r(1+t)^2}{t}\right)dt, \tag{22}$$

$${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)}\int_1^{\infty} t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{rt^2}{t-1}\right)dt, \tag{23}$$

$${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = \frac{z^{1-c}}{B(b,c-b)}\int_0^{z} t^{b-1}(1-t)^{-a}(z-t)^{c-b-1}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{rz^2}{t(z-t)}\right)dt, \tag{24}$$

$$
{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = \frac{2^{1-c}}{B(b,c-b)} \int\limits_0^{\pi} \frac{(\sin\varphi)^{2c-2b-1}(1-\cos\varphi)^{2b-c}}{\left(1-\dfrac{z}{2}+\dfrac{z}{2}\cos\varphi\right)^a} \times
$$

$$
\times\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{4r}{\sin^2\varphi}\right)d\varphi, \tag{25}
$$

$$
{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = \frac{2}{B(b,c-b)} \int\limits_0^{\infty} \frac{(\operatorname{ch}\omega)^{2a-2c+1}(\operatorname{sh}\omega)^{2c-2b-1}}{[(\operatorname{ch}\omega)^2-z]^a}\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r\operatorname{ch}^4\omega}{\operatorname{sh}^2\omega}\right)d\omega, \tag{26}
$$

$$
{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = \frac{2^{b-a}}{B(b,c-b)} \int\limits_0^{\infty} \frac{(\operatorname{sh}\theta)^{2c-2b-1}(\operatorname{ch}\theta+1)^{a+b-2c+1}}{\left(\dfrac{1}{2}-z+\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}\theta\right)^a} \times
$$

$$
\times\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r(1+\operatorname{ch}\theta)^3}{2\operatorname{sh}^2\theta}\right)d\theta, \tag{27}
$$

$$
{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int\limits_0^{\infty} e^{-bt}(1-e^{-t})^{c-b-1}(1-ze^{-t})^{-a}\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{re^t}{1-e^{-t}}\right)dt. \tag{28}
$$

Теорема 5 (співвідношення типу Куммера для функції ${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)$). *За умов існування узагальненої гіпергеометричної функції* ${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)$ *справедливе співвідношення*

$$
{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\, {}_r\widetilde{F}\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right). \tag{29}
$$

Доведення. Використовуємо формулу (3), у ній виконуємо підстановку $t = 1-\nu$, враховуємо перетворення $1-z(1-\nu) = (1-z)(1-(z/(z-1))\nu)$, одержуємо

$$
{}_r\widetilde{F}(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int\limits_0^{1} (1-\nu)^{b-1}\nu^{c-b-1}\left(1-\frac{z}{z-1}\nu\right)^{-a}(1-z)^{-a} \times
$$

$$
\times\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{(1-\nu)\nu}\right)d\nu = \frac{(1-z)^{-a}}{B(b,c-b)} \int\limits_0^{1} \nu^{c-b-1}(1-\nu)^{b-1} \times
$$

$$
\times \left(1-\frac{z}{z-1}\nu\right)^{-a} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{\nu(1-\nu)}\right)d\nu = (1-z)^{-a}\, {}_r\widetilde{F}\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right).
$$

2. Наведемо застосування функцій ${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)$, ${}_r\widetilde{\widetilde{F}}(a,b;c;z)$.

а) Подамо деякі інтеграли з функцією ${}_r\widetilde{F}(a;b;c;z)$:

$$
\int\limits_0^{\infty} z^{m-1}\, {}_r\widetilde{F}(a,b;c;-zx)dz = \frac{B(m,a-m)}{x^m B(b,c-b)}\, {}_{\tau,\beta}B_\alpha^\gamma(b-m,c-b;r), \qquad a>m>0, \tag{30}
$$

$$
\int\limits_0^{\infty} x^{a-\sigma-1}(1-x)^{\sigma-1}\, {}_r\widetilde{F}(a,b;c;zx)dx = B(\sigma,a-\sigma)\, {}_r\widetilde{F}(a-\sigma,b;c;z), \tag{31}
$$

$$\int_0^z {}_r\widetilde{F}(a,b;c;t)dt = \frac{c-1}{(a-1)(b-1)}{}_r\widetilde{F}(a-1,b-1;c-1;z) - \frac{{}_{\tau,\beta}B_{\alpha}^{\gamma}(b-1,c-b;r)}{(a-1)B(b,c-b)}, \qquad (32)$$

$a \neq 1, \qquad b \neq 1.$

Усі ці інтеграли обчислюємо за допомогою зображення функції ${}_r\widetilde{F}(a,b;c;z)$ рядом (див. теорему 1), відповідних підстановок та перетворень.

б) Інтегральне перетворення Мелліна для ${}_r\widetilde{\widetilde{F}}(a,b;c;z)$. Розглянемо інтеграл

$$\int_0^\infty r^{s-1}{}_r\widetilde{\widetilde{F}}(a,b;c;z)dr.$$

Використавши формулу (6) для ${}_r\widetilde{F}(z)$ та виконавши перетворення, одержимо

$$\int_0^\infty r^{s-1}\frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\,{}_\tau B_{\alpha}^{\gamma}(b+n,c-b;r)\frac{z^n}{n!}dr =$$

$$= \frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{z^n}{n!}\int_0^\infty r^{s-1}{}_\tau B_{\alpha}^{\gamma}(b+n,c-b;r)\,dr =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(s)\Gamma(\alpha-s\tau)\Gamma(c-b+s)}{B(b,c-b)\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-s\tau)}\frac{\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+2s)}{}_2F_1(a,b+s;c+2s;z).$$

Отже, інтегральне перетворення Мелліна матиме вигляд

$$M\{{}_r\widetilde{\widetilde{F}}(a,b;c;z);s\} = K\,{}_2F_1(a,b+s;c+2s;z), \qquad (33)$$

де $\mathrm{Re}(c-b) > s$, $\mathrm{Re}\,\alpha > s\tau$, $\mathrm{Re}\,\gamma > s\tau$; $\tau > 0$,

$$K = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(s)\Gamma(\alpha-s\tau)\Gamma(c-b+s)\Gamma(b+s)}{B(b,c-b)\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-s\tau)\Gamma(c+2s)}, \qquad (34)$$

а ${}_2F_1(z)$ — гіпергеометрична функція Гаусса [12].

Формула обернення перетворення Мелліна, застосована до (33), дає цікавий зв'язок між узагальненою гіпергеометричною функцією ${}_r\widetilde{\widetilde{F}}(z)$ і класичною гіпергеометричною функцією Гаусса ${}_2F_1(z)$:

$${}_r\widetilde{\widetilde{F}}(a,b;c;z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{B(b,c-b)}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} K\,{}_2F_1(a,b+s;c+2s;r)r^{-s}ds, \qquad \chi > 0. \qquad (35)$$

П р и м і т к а. При $z = 1$ формула (3) дає

$${}_r\widetilde{F}(a,b;c;1) = \frac{1}{B(b,c-b)}{}_{\tau,\beta}B_{\alpha}^{\gamma}(b,c-b-a;r). \qquad (36)$$

в) Інтегральне рівняння Вольтерра з функцією ${}_1F_1^\tau$ в ядрі. Подамо розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра I роду, що містить τ-узагальнену вироджену (конфлюентну) гіпергеометричну функцію ${}_1F_1^\tau(a;c;z) = {}_1\Phi_1^\tau(a;c;z)$ (див. (4) при $\beta = \tau$).

Теорема 6. *Інтегральне рівняння*

$$\int_t^1 f(u,t)K(u,t)du = \varphi(t), \tag{37}$$

де

$$K(u,t) = (u-t)^{c-1}{}_1F_1^\tau\left(a;c;\frac{\lambda(u-t)^\tau}{\mu-\lambda}\right), \tag{38}$$

$f(u,t)$ *— шукана функція,* $\varphi(t)$ *визначена на* $I = \{t\colon c \leqslant t \leqslant 1\}$, $\varphi'(t)$ *— кусково-неперервна на* I, $\varphi(1) = 0$, $0 < \operatorname{Re} c < \operatorname{Re}\sigma$, *має розв'язок:*

$$f(u,t) = -A\int_u^1 \frac{M(\nu,u)}{N(\nu,t)}d\varphi(\nu), \tag{39}$$

тут $A = \dfrac{\Gamma(\sigma-a)}{\Gamma(c)\Gamma(\sigma-c)}$,

$$N(\nu,t) = (\nu-t)^{\sigma-1}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\sigma-a+n\tau)}{\Gamma(\sigma+n\tau)}\frac{\mu^n(\nu-t)^{n\tau}}{(\mu-\lambda)^n n!}\,{}_1F_1^\tau\left(a;\sigma+n\tau;\frac{\lambda(\nu-t)^\tau}{\mu-\lambda}\right), \tag{40}$$

$$M(\nu,u) = (\nu-u)^{\sigma-c-1}{}_1F_1^\tau\left(\sigma-a;\sigma-c;\frac{\mu(\nu-u)^\tau}{\mu-\lambda}\right). \tag{41}$$

Доведення. При доведенні теореми істотну роль відіграє так звана інтегральна теорема додавання для τ-узагальненої виродженої гіпергеометричної функції ${}_1F_1^\tau(z)$:

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{\sigma-c-1}{}_1F_1^\tau(a;c;\lambda y x^\tau)\,{}_1F_1^\tau(\sigma-a;\sigma-c;\mu(1-x)^\tau y)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(\sigma-c)}{\Gamma(\sigma-a)}\sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\sigma-a+k\tau)}{\Gamma(\sigma+k\tau)}\frac{\mu^k y^k}{k!}\,{}_1F_1^\tau(a;\sigma+k\tau;\lambda y). \tag{42}$$

Тому спочатку доведемо формулу (42):

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{\sigma-c-1}{}_1F_1^\tau(a;c;\lambda y x^\tau)\,{}_1F_1^\tau(\sigma-a;\sigma-c;\mu(1-x)^\tau y)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{\sigma-c-1}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a+n\tau)}{\Gamma(c+n\tau)}\frac{\lambda^n y^n x^{n\tau}}{n!}\frac{\Gamma(\sigma-c)}{\Gamma(\sigma-a)}\times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma - a + k\tau)}{\Gamma(\sigma - c + k\tau)} \frac{\mu^k y^k (1-x)^{k\tau}}{k!} dx =$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(\sigma - c)}{\Gamma(a)\Gamma(\sigma - a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k y^k}{k!} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{\sigma - a + k\tau - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n y^n x^{n\tau}}{n!} dx =$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma(\sigma - c)}{\Gamma(a)\Gamma(\sigma - a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k y^k}{k!} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{\sigma - a + k\tau - 1} e^{\lambda y x^{\tau}} dx.$$

Врахувавши інтегральне зображення функції ${}_1F_1^{\tau}$ [9], одержимо (42).

Повернемося до розв'язання інтегрального рівняння (37). Підставивши значення $f(u,t)$ із (39) у ліву частину (37) та помінявши порядки інтегрування, матимемо

$$I = \int_t^1 f(u,t) K(u,t) du = -A \int_t^1 K(u,t) du \int_u^1 \frac{M(\nu,u)}{N(\nu,t)} d\varphi =$$

$$= -A \int_t^1 \frac{d\varphi(\nu)}{N(\nu,t)} \int_t^{\nu} M(\nu,u) K(u,t)\, du.$$

Зауважимо, що внутрішній інтеграл згідно з формулами (38), (41) після підстановок

$$u - t = x(\mu - \lambda)^{1/\tau} y^{1/\tau},$$

$$\nu - u = (\mu - \lambda)^{1/\tau} y^{1/\tau} (1-x)$$

дає інтеграл вигляду (42).

Врахувавши умови теореми, формулу (42), після перетворень переконуємось у справедливості (39).

1. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. – Москва: Физматгиз, 1963. – 358 с.
2. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представления групп. – Москва: Наука, 1965. – 588 с.
3. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – Москва: Мир, 1980. – 608 с.
4. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. – Москва: Наука, 1978. – 376 с.
5. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-Transforms. – London: Chapman and Hall, 2004. – 390 p.
6. *Chaudhry M. A., Zubair S. M.* On a class of incomplete gamma functions with applications. – London: Chapman and Hall, 2000. – 494 p.
7. *Wright E. M.* On the coefficient of power series having exponential singulaties // J. London Math. Soc. – 1933. – **8**. – P. 71–80.
8. *Wright E. M.* The asympotic expansion of the generalized hypergeometric function // Ibid. – 1935. – **10**. – P. 286–293.
9. *Virchenko N. O.* On some generalizations of the functions of hypergeometric type // J. Fract. Calculus and Appl. Anal. – 1999. – **2**, No 3. – P. 233–244.
10. *Вірченко Н. О., Рум'янцева О. В.* Про узагальнену гіпергеометричну функцію Гаусса та її застосування // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 12–19.
11. *Chaudhry M. A., Ahmad M.* On a probability function useful in size modeling // Can. J. Forest Res. – 1993. – No 8. – P. 38–51.

12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Москва: Наука, 1965. – Т. 1. – 296 с.
13. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application // J. Fract. Calculus and Appl. Anal. – 2006. – **9**, No 2. – P. 101–108.
14. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1973. – 736 с.
15. *Вірченко Н. О.* Узагальнені спеціальні функції та їх застосування // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2006. – № 4. – С. 42–49.

НТУ України "Київський політехнічний інститут" *Надійшло до редакції 27.11.2008*

N. O. Virchenko, O. M. Lysetska, O. V. Ovcharenko

To the theory of generalized functions of the hypergeometric type and their applications

A new generalization of the Gauss hypergeometric function is introduced, the basic properties of this function are investigated, and some differential, integral, functional relations are established. Some applications of this function are given, in particular, the Volterra integral equation is solved in closed form.