УДК 517.984,517.929



**Ю. Д. Головатий, С. С. Манько**

# Оператор Шредінгера з $\delta'$-потенціалом

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України Б. Й. Пташником)*

*Вивчено одновимірні оператори Шредінгера з псевдопотенціалами, що містять похідну функції Дірака. Запропоновано нову сім'ю самоспряжених операторів, що відповідає формальним диференціальним операторам* $-\dfrac{d^2}{dx^2} + U(x) + \alpha\delta'(x)$.

Повідомлення присвячено точним моделям квантової механіки, а саме вивченню операторів Шредінгера з потенціалами, зосередженими на дискретній множині точок. Такі моделі називають точними, оскільки резольвенти відповідних операторів будуються явно, що дозволяє обчислити спектри та коефіцієнти розсіяння [1, с. 1]. Основною проблемою є надання строгого математичного змісту диференціальним операторам з узагальненими функціями в коефіцієнтах. Оскільки простір розподілів $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ не є алгеброю, то знаходження адекватного фізичній моделі оператора є непростою задачею. Точні моделі досліджуються методами теорії самоспряжених розширень симетричних операторів [1–9]. У деяких випадках ця теорія пропонує достатньо багату множину самоспряжених розширень, хоча лише одне з них має фізичне підгрунтя. Зазвичай, дослідники вибирають "правильний" оператор, послуговуючись евристичними міркуваннями та фізичною інтуїцією. Однак у такій ситуації проблема вибору адекватного самоспряженого оператора не вирішується теорією самоспряжених розширень, оскільки фізична задача містить "приховані" параметри.

Точні моделі розглядались багатьма дослідниками. Достатньо повну бібліографію можна знайти в [1]. Ми цитуємо лише роботи, що безпосередньо пов'язані з оператором Шредінгера з $\delta'$-потенціалом (результати попередників детально проаналізовано у п. 3).

**1. Формулювання задачі та допоміжні факти.** У роботі запропонований математично і фізично вмотивований, на наш погляд, шлях вибору самоспряженого розширення, що відповідає формальному одновимірному операторові Шредінгера вигляду

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x) + \alpha\delta'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Тут $U$ — гладка функція, $\delta'$ — похідна функції Дірака. Зауважимо, що при $\alpha \neq 0$ рівняння $Hy = \lambda y$ не має ненульових розв'язків у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, якщо добуток $\delta'(x)y(x)$ розуміти як $y'(0)\delta(x) - y(0)\delta'(x)$.

Нехай $\mathcal{E}(L)$ — множина самоспряжених розширень оператора $L = -\dfrac{d^2}{dx^2} + U(x)$, $\mathcal{D}(L) = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R})\colon f(0) = f'(0) = 0\}$ в $L_2(\mathbb{R})$, а $\mathcal{P}$ — множина функцій $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ таких, що $\operatorname{supp}\Psi = [-1, 1]$ і послідовність $\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$ збігається при $\varepsilon \to 0$ до $\delta'(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Розглянемо також сім'ю гамільтоніанів $\mathcal{H}_{\varepsilon,\alpha}(\Psi)$ з гладкими потенціалами, які є замиканням у $L_2(\mathbb{R})$ операторів $H_{\varepsilon,\alpha}(\Psi) = -\dfrac{d^2}{dx^2} + U(x) + \dfrac{\alpha}{\varepsilon^2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, $\mathcal{D}(H_{\varepsilon,\alpha}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$. Функцію $\Psi$ називатимемо профілем $\delta'$-подібного збурення, а число $\alpha$ — сталою зв'язку.

Ми будуємо відображення $\mathbb{R}\times\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{E}(L)$, яке кожній парі $(\alpha,\Psi)$ ставить у відповідність самоспряжене розширення $\mathcal{H}_\alpha(\Psi)$ оператора $L$. Вибір оператора грунтується на близькості "енергетичних рівнів" гамільтоніанів з гладким та сингулярним потенціалами. У припущенні, що поведінка потенціалу $U$ на нескінченності гарантує дискретність спектра операторів $\mathcal{H}_{\varepsilon,\alpha}(\Psi)$, ми шукаємо асимптотику їх власних значень $\lambda_j^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ при $\varepsilon\to 0$. Граничний оператор, до спектра якого збігаються $\lambda_j^\varepsilon(\alpha,\Psi)$, називаємо оператором $\mathcal{H}_\alpha(\Psi)$. Сім'я операторів $\{\mathcal{H}_\alpha(\Psi)\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ залежить від профілю збурення $\Psi$, який і є "прихованим" параметром моделі з $\delta'$-потенціалом. Кожен потенціал $\Psi$ породжує оператор $\mathcal{T}_\Psi$ у просторі Крейна, спектр якого істотно впливає на структуру цієї сім'ї.

Нехай $U(x)\to+\infty$ при $|x|\to\infty$. Оскільки $L$ — симетричний оператор з індексами дефекту $(2,2)$, то множина $\mathcal{E}(L)$ є досить багатою.

**Лема 1.** *Кожен елемент множини $\mathcal{E}(L)$ є звуження спряженого в $L_2(\mathbb{R})$ оператора $L^*$ на клас функцій, які в початку координат задовольняють один з двох типів крайових умов:*

*(i) $h_1^- f'(-0)=h_2^- f(-0)$, $h_1^+ f'(+0)=h_2^+ f(+0)$, де $(h_1^\pm,h_2^\pm)$ — точки проективної прямої $\mathbb{P}^1$;*

*(ii) $\begin{pmatrix} f(+0)\\ f'(+0)\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} f(-0)\\ f'(-0)\end{pmatrix}$, $C=e^{i\varphi}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$, де $\varphi\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $c_{kl}\in\mathbb{R}$ та $c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=1$.*

Розширення, породжені умовами $(i)$, називаються незв'язаними. Вони є прямою сумою двох операторів, заданих на півосях. Умовам спряження $(ii)$ відповідають так звані зв'язані розширення. У випадку $U=0$ лема доведена в [2, 3]. Зрозуміло, що гладкий потенціал $U$ не впливає на вигляд крайових умов у точці $x=0$.

Тепер опишемо множину потенціалів $\mathcal{P}$. Введемо позначення для моментів функції

$$m_k(\Psi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^k\Psi(\xi)\,d\xi,\qquad k=0,1,2,\ldots.$$

**Лема 2.** *Нехай $\Psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Послідовність $\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$ збігається при $\varepsilon\to 0$ до $\delta'(x)$ у топології $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ тоді і лише тоді, коли $m_0(\Psi)=0$, $m_1(\Psi)=-1$.*

З варіаційного принципу отримуються такі властивості власних значень $\lambda_j^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ операторів $\mathcal{H}_{\varepsilon,\alpha}(\Psi)$.

**Теорема 1.** *Нехай $\Psi\in\mathcal{P}$. Для кожного $\alpha\in\mathbb{R}$ власні значення $\lambda_j^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ є неперервними функціями змінної $\varepsilon\in(0,1)$ і залишаються обмеженими зверху при $\varepsilon\to 0$. Якщо $\alpha\neq 0$, то $\lambda_1^\varepsilon(\alpha,\Psi)\to-\infty$, тобто спектр операторів $\mathcal{H}_{\varepsilon,\alpha}(\Psi)$ є необмеженим знизу при $\varepsilon\to 0$. Є лише скінченна кількість власних значень з такою асимптотикою, решта мають скінченні границі при $\varepsilon\to 0$.*

**2. Асимптотика власних значень оператора $\boldsymbol{\mathcal{H}_{\varepsilon,\alpha}(\Psi)}$.** Ми шукатимемо асимптотику скінченної частини спектра, тобто обмежених при $\varepsilon\to 0$ власних значень. Розглянемо спектральну задачу $-y''_\varepsilon+U(x)y_\varepsilon+\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)y_\varepsilon=\lambda^\varepsilon y_\varepsilon$, $y_\varepsilon\in L_2(\mathbb{R})$, і деяке її власне значення $\lambda_j^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ зі скінченною границею позначимо через $\lambda^\varepsilon$, а власну функцію — через $y_\varepsilon$. Асимптотичні розвинення $\lambda^\varepsilon$ та $y_\varepsilon$ будуватимемо у вигляді

$$\lambda^\varepsilon\sim\lambda+\varepsilon\lambda_1+\cdots,\qquad y_\varepsilon(x)\sim\begin{cases} v(x)+\varepsilon v_1(x)+\cdots, & |x|>\varepsilon,\\ w(\varepsilon^{-1}x)+\varepsilon w_1(\varepsilon^{-1}x)+\cdots, & |x|<\varepsilon,\end{cases}\tag{1}$$

припускаючи, що виконуються умови спряження $[y_\varepsilon]_{x=\pm\varepsilon} = 0$, $[y'_\varepsilon]_{x=\pm\varepsilon} = 0$. Тут функції $v$, $v_k$ визначені на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ і належать $L_2(\mathbb{R})$, а $w$, $w_k$ — на інтервалі $(-1,1)$.

Введемо "швидку" змінну $\xi = \varepsilon^{-1}x$. Після підстановки рядів у рівняння та узгодження їх у точках $x = \pm\varepsilon$ ($\xi = \pm 1$) отримаємо, що функція $v$ на кожній з півосей є розв'язком рівняння $-v'' + Uv = \lambda v$, функція $w$ повинна бути розв'язком задачі

$$-w'' + \alpha\Psi(\xi)w = 0, \qquad \xi \in (-1,1), \qquad w'(-1) = 0, \qquad w'(1) = 0, \tag{2}$$

і обидві пов'язані умовами спряження

$$v(-0) = w(-1), \qquad v(+0) = w(1). \tag{3}$$

Задача (2) є визначальною в наших міркуваннях, оскільки містить усю інформацію про характер $\delta'$-подібного збурення, а саме профіль $\Psi$ та сталу $\alpha$. Алгоритм побудови асимптотики залежить від того, чи має ця задача нетривіальні розв'язки, тобто чи є стала $\alpha$, коли її трактувати як спектральний параметр, власним значенням.

*Оператор $\mathcal{T}_\Psi$ у просторі Крейна.* Для вибраної функції $\Psi \in \mathcal{P}$ введемо простір Лебега $\mathcal{K}_\Psi$ зі скалярним добутком $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} |\Psi| f\overline{g}d\xi$. Перетворимо $\mathcal{K}_\Psi$ у простір Крейна [10], задавши в ньому індефінітну метрику $[f,g] = \int\limits_{-1}^{1} \Psi f\overline{g}d\xi$. У $\mathcal{K}_\Psi$ існує канонічна симетрія $J$: $(Jf,g) = [f,g]$ для всіх $f$, $g \in \mathcal{K}$. У нашому випадку такою симетрією є оператор множення на функцію $\operatorname{sgn}\Psi$. Задачі (2) відповідає оператор $\mathcal{T}_\Psi = -\dfrac{1}{\Psi(\xi)}\dfrac{d^2}{d\xi^2}$, $\mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi) = \{f \in \mathcal{K}_\Psi \colon f \in W_2^2(-1,1), \Psi^{-1}f'' \in \mathcal{K}_\Psi, f'(-1) = 0, f'(1) = 0\}$. Можна довести, що $\mathcal{T}_\Psi$ є $J$-самоспряженим та $J$-невід'ємним, тобто $[\mathcal{T}_\Psi f, g] = [f, \mathcal{T}_\Psi g]$ та $[\mathcal{T}_\Psi f, f] \geqslant 0$ для всіх $f$, $g \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi)$.

**Теорема 2.** *Якщо $\Psi \in \mathcal{P}$, то спектр оператора $\mathcal{T}_\Psi$ є дійсним, дискретним і має дві точки скупчення $-\infty$ і $+\infty$. Усі власні значення є простими, але $\ker\mathcal{T}_\Psi \neq \ker\mathcal{T}_\Psi^2$, тобто нульове власне значення ще має приєднаний вектор.*

**Доведення.** Дійсність спектра оператора $\mathcal{T}_\Psi$ випливає з його $J$-самоспряженості та $J$-невід'ємності, а також того факту, що резольвентна множина є непорожньою [10, с. 138]. Дискретність спектра випливає з компактності резольвенти для оператора другого диференціювання, а існування двох точок скупчення — із знакозмінності вагової функції [11]. З умови $m_0(\Psi) = 0$ отримується існування приєднаного вектора для нульового власного значення. Відомо також, що довжина жорданового ланцюжка для $J$-невід'ємного оператора не перевищує 2 [10, с. 137].

Далі спектр оператора $\mathcal{T}_\Psi$ позначатимемо через $\Sigma_\Psi$ і називатимемо резонансною множиною потенціалу $\Psi$.

*Побудова граничного оператора.* Продовжимо побудову асимптотики. Нехай спершу $\alpha \notin \Sigma_\Psi$. Тоді задача (2) має єдиний розв'язок $w = 0$, а з умов (3) випливає $v(-0) = v(+0) = 0$. Отже, $v$ повинна бути власною функцією з власним значенням $\lambda$ прямої суми операторів Шредінгера на півосях

$$\begin{cases} -v'' + U(x)v = \lambda v, & x \in \mathbb{R}_-,\\ v(0) = 0, & v \in L_2(\mathbb{R}_-), \end{cases} \qquad \begin{cases} -v'' + U(x)v = \lambda v, & x \in \mathbb{R}_+,\\ v(0) = 0, & v \in L_2(\mathbb{R}_+), \end{cases} \tag{4}$$

які ми позначатимемо $S_-$ та $S_+$ відповідно.

Нехай тепер $\alpha \in \Sigma_\Psi$, а $w = W_\alpha$ — власна функція оператора $\mathcal{T}_\Psi$. Введемо позначення $\theta_\Psi(\alpha) = W_\alpha(1)/W_\alpha(-1)$, зауваживши, що числа $W_\alpha(\pm 1)$ відмінні від нуля. Оскільки спектр $\mathcal{T}_\Psi$ є простим, то величина $\theta_\Psi(\alpha)$ не залежить від вибору власної функції і її можна трактувати як функцію $\theta_\Psi \colon \Sigma_\Psi \to \mathbb{R}$ на спектрі. Називатимемо $\theta_\Psi$ функцією зв'язку. З (3) маємо $v(-0) = W_\alpha(-1)$, $v(+0) = W_\alpha(1)$. Звідси, як наслідок, отримуємо умову спряження $v(+0) - \theta_\Psi(\alpha) v(-0) = 0$. Щоб отримати умову для односторонніх похідних функції $v$ в нулі, розглянемо задачу для наступного члена асимптотики

$$-w_1'' + \alpha \Psi(\xi) w_1 = 0, \qquad \xi \in (-1, 1), \qquad w_1'(-1) = v'(-0), \qquad w_1'(1) = v'(+0). \tag{5}$$

Це неоднорідна задача "на спектрі", і вона матиме розв'язок тоді і лише тоді, коли $W_\alpha(1) v'(+0) = W_\alpha(-1) v'(-0)$. Цю умову можна записати так: $\theta_\Psi(\alpha) v'(+0) - v'(-0) = 0$. Отже, для сталої зв'язку $\alpha$ з $\Sigma_\Psi$ граничний оператор породжується в $L_2(\mathbb{R})$ задачею

$$-v'' + Uv = \lambda v, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad v(+0) - \theta_\Psi(\alpha) v(-0) = 0, \quad \theta_\Psi(\alpha) v'(+0) - v'(-0) = 0.$$

Цей оператор, який ми позначимо через $S_\alpha(\Psi)$, є зв'язаним самоспряженим розширенням оператора $L$ з діагональною матрицею зв'язку

$$C_\Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \theta_\Psi(\alpha) & 0 \\ 0 & \theta_\Psi(\alpha)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

**3. Основний результат та історія питання.** Формальна асимптотика спектра, яка обгрунтована в п. 4, дозволяє зробити такий висновок. Якщо квантово-механічній системі відповідає гамільтоніан $-\dfrac{d^2}{dx^2} + U(x) + \dfrac{\alpha}{\varepsilon^2} \Psi(\varepsilon^{-1} x)$, $\Psi \in \mathcal{P}$, то, абстрагуючись від потенціалу малого радіуса дії, його можна замінити гамільтоніаном $-\dfrac{d^2}{dx^2} + U(x) + \alpha \delta'(x)$. Останній, пам'ятаючи про профіль $\Psi$, треба трактувати як сім'ю самоспряжених розширень $\{\mathcal{H}_\alpha(\Psi)\}_{\alpha \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{E}(L)$, де $\mathcal{H}_\alpha(\Psi) = S_- \oplus S_+$, коли $\alpha \notin \Sigma_\Psi$, та $\mathcal{H}_\alpha(\Psi) = S_\alpha(\Psi)$, коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$.

Отже, кожен $\delta'$-подібний профіль $\Psi$ породжує резонансну множину $\Sigma_\Psi$ та функцію зв'язку $\theta_\Psi \colon \Sigma_\Psi \to \mathbb{R}$. Для майже всіх сталих зв'язку $\alpha$ оператор $\mathcal{H}_\alpha(\Psi)$ є прямою сумою операторів Шредінгера на півосях і моделює ситуацію, коли квантово-механічна частинка з імовірністю 1 знаходиться на одній із півосей (випадок закритого $\delta'$-бар'єру). Однак при $\alpha \in \Sigma_\Psi$ оператор $\mathcal{H}_\alpha(\Psi)$ потрапляє в клас зв'язаних самоспряжених розширень. Тоді частинка може проникати через бар'єр і з ненульовими ймовірностями знаходитися на кожній з півосей (випадок відкритого $\delta'$-бар'єру).

Проблема правильного трактування оператора $A = -d^2/dx^2 + \alpha \delta'(x)$ розглядається з 80-х років минулого століття. Так P. Šeba [4] та F. Gesztesy, H. Holden [5] визначили $A$ як сім'ю операторів $A_\beta = -d^2/dx^2$, $\mathcal{D}(A_\beta) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \colon f'(-0) = f'(+0), f(+0) - f(-0) = \beta f'(0)\}$, де $\beta$ залежить від сталої $\alpha$. Після виходу в світ книги S. Albeverio із співавт. [1] таке означення $\delta'$-взаємодії деякий час вважалося стандартним. B.-H. Zhao [12] першим скритикував його і запропонував своє. Проте оператор Zhao не був самоспряженим, а тому не відповідав постулатам квантової механіки. P. Kurasov та N. Elander [13] "удосконалили" цей оператор, визначивши $A$ як оператор другої похідної в $W_2^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ з умовами $f(+0) - f(-0) = (\alpha/2)(f(+0) + f(-0))$, $f'(+0) - f'(-0) = -(\alpha/2)(f'(+0) + f'(-0))$. Їх означення опиралося на узагальнення функції Дірака та її похідних на випадок розривних у нулі тестових функцій [14]: $\langle \delta^{(n)}(x), \varphi(x) \rangle = ((-1)^n/2)(\varphi^{(n)}(+0) + \varphi^{(n)}(-0))$.

Ми вважаємо, що оператор $A$ треба розуміти як сім'ю побудованих вище самоспряжених розширень $\mathcal{H}_\alpha(\Psi)$ при $U = 0$, де $\Psi$ є "профілем" функції $\delta'(x)$ у конкретній фізичній моделі. Зауважимо, що означення резонансної множини $\Sigma_\Psi$ та функції зв'язку $\theta_\Psi$ не залежать від потенціалу $U$.

Бачимо, що означення S. Albeverio не узгоджується з нашим, оскільки матриця зв'язку операторів $A_\beta$ не є діагональною. Скоріше за все, "$\delta'$-взаємодія" та "$\delta'$-потенціал" — це різні фізичні феномени. В означенні П. Курасова спільним з нашим є те, що його матриця зв'язку має вигляд (6) із заміною $\theta_\Psi(\alpha)$ на $(2+\alpha)/(2-\alpha)$. Правда, у попередників оператори при всіх $\alpha$ є зв'язаними самоспряженими розширеннями, що більш привабливо з погляду теорії розсіяння, але не цілком узгоджується з фізикою. На підтвердження цієї тези ми розв'язали задачу розсіяння на кусково-сталому $\delta'$-подібному потенціалі $(\alpha/\varepsilon^2)\Psi_0(\varepsilon^{-1}x)$, де $\Psi_0(\xi) = 1$ при $-1 < \xi < 0$ і $\Psi_0(\xi) = -1$ при $0 < \xi < 1$. Явна формула для коефіцієнта проходження $|T_\varepsilon(\alpha, k)|^2$ свідчить про те, що він прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$, коли $\alpha \notin \Sigma_{\Psi_0}$, а ненульову границю має лише, коли $\alpha \in \Sigma_{\Psi_0}$. Тут $\Sigma_{\Psi_0}$ — множина коренів трансцендентного рівняння $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{th}\alpha$.

Зауважимо, що отриманий асимптотичний результат залишається справедливим для будь-якого потенціалу $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, а не лише з класу $\mathcal{P}$. Випадок $\delta'$-подібного потенціалу характеризується структурою множини $\Sigma_\Psi$, описаною в теоремі 2, а також спеціальною поведінкою функції зв'язку $\theta_\Psi$. Обчислення точних моделей і комп'ютерне моделювання задачі з більш складними потенціалами дозволяє нам зробити припущення, доведення якого мало б отримуватися методами просторів Крейна.

**Гіпотеза.** Нехай потенціал $\Psi$ задовольняє умови $m_0(\Psi) = 0$, $m_1(\Psi) = -1$. Тоді $|\theta_\Psi(\alpha)| > 1$ для $\alpha \in \Sigma_\Psi \bigcap \mathbb{R}_+$ і $|\theta_\Psi(\alpha)| < 1$ для $\alpha \in \Sigma_\Psi \bigcap \mathbb{R}_-$. Крім того, $|\theta_\Psi(\alpha)| \to \infty$ при $\alpha \to +\infty$ та $|\theta_\Psi(\alpha)| \to 0$ при $\alpha \to -\infty$.

Умови $m_0(\Psi) = 0$, $m_1(\Psi) = -1$ вимагають не лише знакозмінності, а й у певному сенсі "асиметричності" потенціалу. Тому, наприклад, для парного потенціалу $\Phi$ гіпотеза не підтверджується, оскільки $|\theta_\Phi(\alpha)| = 1$ для всіх $\alpha \in \Sigma_\Phi$.

**4. Обгрунтування асимптотики.** В обох випадках, як відкритого, так і закритого $\delta'$-бар'єру, вибравши власне значення $\lambda$ оператора $\mathcal{H}_\alpha(\Psi)$, можна обчислити коефіцієнти рядів (1) з довільним номером. Розглянемо їх частинні суми

$$\Lambda_N^\varepsilon = \lambda + \varepsilon\lambda_1 + \cdots + \varepsilon^N \lambda_N,$$

$$Y_N^\varepsilon(x) = \begin{cases} v(x) + \varepsilon v_1(x) + \cdots + \varepsilon^N v_N(x), & |x| > \varepsilon, \\ w\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon w_1\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) + \cdots + \varepsilon^N w_N\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right), & |x| < \varepsilon, \end{cases} \tag{7}$$

де $v$ — відповідна власна функція, а $w = 0$ при $\alpha \notin \Sigma_\Psi$ та $w = W_\alpha$ при $\alpha \in \Sigma_\Psi$.

**Теорема 3.** *Нехай $\Psi \in \mathcal{P}$ та $\alpha \in \mathbb{R}$. Для кожного власного значення $\lambda$ оператора $\mathcal{H}_\alpha(\Psi)$ існує таке власне значення $\lambda_j^\varepsilon(\alpha, \Psi)$ оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\alpha}(\Psi)$, що $\lambda_j^\varepsilon(\alpha, \Psi) \to \lambda$ при $\varepsilon \to 0$. Крім того, $|\lambda_j^\varepsilon(\alpha, \Psi) - \Lambda_N^\varepsilon(\lambda)| \leqslant C_N \varepsilon^{N+1}$, де стала $C_N$ не залежить від $\varepsilon$.*

**Доведення.** Функція $Y_N^\varepsilon$ не належить області визначення оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\alpha}(\Psi)$, оскільки має розриви величини $O(\varepsilon^{N+1})$ при $x = \pm\varepsilon$. Побудувавши коректор $\zeta_N^\varepsilon$ з малою нормою, переконуємося, що пара $\Lambda_N^\varepsilon$, $\mathcal{Y}_N^\varepsilon = Y_N^\varepsilon + \zeta_N^\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{\varepsilon,\alpha}(\Psi))$ є квазімодою оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\alpha}(\Psi)$ із нев'язкою порядку $\varepsilon^{N-1}$, тобто $\|(\mathcal{H}_{\varepsilon,\alpha}(\Psi) - \Lambda_N^\varepsilon I)\mathcal{Y}_N^\varepsilon\| \leqslant c\varepsilon^{N-1}\|\mathcal{Y}_N^\varepsilon\|$. Тут $\|\cdot\|$ — норма в просторі $L_2(\mathbb{R})$. Тоді результат отримується із леми Вішика–Люстерника. Детально техніка побудови та обгрунтування таких асимптотик описана в [15].

У це повідомлення не ввійшли результати про асимптотику молодших власних значень $\lambda_j^\varepsilon(\alpha, \Psi)$, які прямують до $-\infty$, а також випадок потенціалів $\Psi$ із незв'язними носіями.


1. *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. – Berlin: Springer, 1988. – 452 p.
2. *Šeba P.* The generalized point interaction in one dimension // Czech. J. Phys. – 1986. – **B36**. – P. 667–673.
3. *Chernoff P., Hughes R.* A new class of point interactions in one dimension // J. Funct. Anal. – 1993. – **111**. – P. 97–117.
4. *Šeba P.* Some remarks on the $\delta'$-interaction in one dimension // Rep. Math. Phys. – 1986. – **24**, No 1. – P. 111–120.
5. *Gesztesy F., Holden H.* A new class of solvable models in quantum mechanics describing point interactions on the line // J. Phys. – 1987. – **A20**. – P. 5157–5177.
6. *Кочубей А. Н.* Симметрические операторы и неклассические спектральные задачи // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 3. – С. 425–434.
7. *Нижник Л. П.* Оператор Шредингера с $\delta'$-взаимодействием // Функц. анализ и его приложения. – 2003. – **37**, № 1. – С. 85–88.
8. *Exner P., Neidhardt H., Zagrebnov V.* Potential approximations to $\delta'$: an inverse Klauder phenomenon with norm-resolvent convergence // Communs Math. Phys. – 2001. – **224**. – P. 593–612.
9. *Голощапова Н. И., Оридорога Л. Л.* Дифференциальный оператор четвертого порядка с локальными точечными взаимодействиями // Укр. мат. вiсник. – 2007. – **4**, № 3. – С. 355–369.
10. *Иохвидов И. С., Азизов Т. Я.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – Москва: Наука, 1986. – 352 с.
11. *Ćurgus B., Langer H.* A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function // J. Different. Equat. – 1989. – **79**, No 1. – P. 31–61.
12. *Zhao B.-H.* Comments on the Schrödinger equation with $\delta'$-interactions in one dimension // J. Phys. – 1992. – **A25**. – P. L617–L618.
13. *Kurasov P., Elander N.* On the $\delta'$-interactions in one dimension. – Stockholm, 1993. – (Prepr. MSI 93–7, ISSN – 1100–214X).
14. *Kurasov P.* Distribution Theory for Discontinuous Test Functions and Differential Operators with Generalized Coefficients // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – **201**. – P. 297–323.
15. *Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А., Соболева Т. С.* О собственных колебаниях струны с присоединенной массой // Сиб. мат. журн. – 1988. – **29**, № 5. – С. 71–91.


*Львівський національний університет ім. Івана Франка* *Надійшло до редакції 30.09.2008*

**Yu. D. Golovaty, S. S. Man'ko**

## Schrödinger operator with $\delta'$-potential

*The 1-dimensional Schrödinger operators with pseudopotentials involving the derivative of the Dirac function are investigated. We present a new family of self-adjoint operators which correspond to the formal differential operators* $-\dfrac{d^2}{dx^2} + U(x) + \alpha\delta'(x)$.