УДК 517.9

Н. З. Дильная, М. Фечкан

Однозначная разрешимость и устойчивость симметрических и периодических решений слабонелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Самойленко)

Встановлено умови існування единого періодичного та симетричного розв'язку слабонелінійного звичайного диференціального рівняння загального виду. Одержано умови стійкості цього розв'язку.

1. Постановка задачи и определения. В работе изучаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений с условиями симметричности и периодичности. Рассматриваются слабонелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\dot{x} = \varepsilon f(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с малым параметром $\varepsilon \in \mathbb{R}$, функция $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ симметрическая по x и pT-периодическая по t, т. е. она удовлетворяет соотношению

$$Af(x,t) = f(Ax, t+T), \tag{2}$$

где $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное преобразование такое, что $A^p = \mathbb{I}$ при $p \in \mathbb{N}$. Используя это свойство, мы получаем следующую конструкцию. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$(x,y) := \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} \langle A^i x, A^i y \rangle$$

как новое скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, мы получаем $(Ax, Ay) = (x,y)$ и $|Ax| = |x|$ при $|x| := \sqrt{(x,x)}$. Таким образом, A — унитарное преобразование со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Везде в работе мы предполагаем, что $1 \notin \sigma(A)$, где $\sigma(A)$ — спектр A. Норма в $L(\mathbb{R}^n)$ обобщает $|\cdot|$ и обозначается $\|\cdot\|$.

Замечание 1. Уравнение (1) изучается на открытом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^n$, для уравнения (1) при малом параметре ε не рассматриваются бифуркации из бесконечности.

Для $T > 0$ мы вводим Банахово пространство

$$X := \{x \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid x(t+T) = Ax(t),\ t \in \mathbb{R}\}. \tag{3}$$

Заметим, что $|x(t)|$ — это T-периодическая функция, так как $|x(t+T)| = |Ax(t)| = |x(t)|$. Таким образом, норма $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,T]} |x(t)| = \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$ в X. Очевидно, что если функция x принадлежит пространству X, то она будет pT-периодическая.

В настоящей работе найдено единственное симметрическое и периодическое решение (см. п. 2) для уравнения (1) и установлены условия, при которых это решение асимптотически устойчиво (см. п. 3) или гиперболического типа (см. п. 4), приведен пример, иллюстрирующий полученную теорию (см. п. 5).

Представленные здесь результаты обобщают известные результаты для антипериодических задач при $A = -\mathbb{I}$ [1, 2] и являются дополнением работы [3]. Двойные симметрические решения изучались в [4].

2. Однозначная разрешимость слабонелинейных уравнений. Изучение симметрических и периодических решений x уравнения (1) эквивалентно решению уравнения (1) на отрезке $t \in [0, T]$ с краевыми условиями $x(T) = Ax(0)$.

Рассмотрим задачу типа

$$\dot{x} = \varepsilon f(x,t), \qquad t \in [0,T], \qquad x(0) = x. \tag{4}$$

Положим $\varphi_\varepsilon(x,t)$ — единственное решение (4). Заметим, что $\varphi_\varepsilon(x,0) := x$. Очевидно, что pT-периодическое решение уравнения (1) определяет уравнение

$$P_\varepsilon(x) := \varphi_\varepsilon(x, pT) = x.$$

С другой стороны, T-периодические и симметрические решения (1), т. е. решения, принадлежащие X, задаются уравнением $Ax = \varphi_\varepsilon(x,T)$. С этой целью введем новое отображение

$$g_\varepsilon(x) := A^{-1}\varphi_\varepsilon(x,T).$$

Предполагаем, что функция f будет C^∞-гладкой. Асимптотическое разложение можно получить с помощью методов усреднения. Т. е. допускаем, что существует разложение P_ε и g_ε в ряд Тейлора по малому параметру ε:

$$P_\varepsilon(x) = P_0(x) + \varepsilon P_1(x) + \cdots,$$
$$g_\varepsilon(x) = g_0(x) + \varepsilon g_1(x) + \cdots.$$

Теорема 1. *При малом параметре $\varepsilon \neq 0$ уравнение* (1) *имеет единственное T-периодическое и pT-периодическое решение $x_\varepsilon(t) \in X$ такое, что $x_\varepsilon(0) = x_\varepsilon$, $g_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$, $P_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$ и $x_\varepsilon(t) = O(\varepsilon)$.*

3. Устойчивость T-периодических и симметрических решений. Для изучения устойчивости T-периодического и симметрического решения $x_\varepsilon(t) \in X$ уравнения (1) мы рассматриваем линеаризацию $D_x g_\varepsilon(x_\varepsilon)$ в фиксированной точке $x_\varepsilon = O(\varepsilon)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *При любом малом параметре $\varepsilon > 0$ единственное симметрическое и T-периодическое решение $x(t) = O(\varepsilon)$ уравнения* (1) *будет асимптотически устойчивым, если выполняется условие*

$$\mathrm{Re}\left\{\sigma\left(\int\limits_0^T D_x f(0,s)\,ds\right)\right\} \subset (-\infty, 0).$$

4. k-Гиперболичность. Анализируя доказательства теорем 2.2 и 2.4 работы [5], приходим к следующему обобщению.

Теорема 3. *Из сильной k-гиперболичности вытекает k-гиперболичность.*

Теорема 4. *Предположим, что непрерывная матричная функция $L_\varepsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является C^∞-гладкой, т. е. существует разложение в ряд Тейлора $L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1 + \dots + \varepsilon^k L_k$, если собственные значения L_0 — различные числа на единичном круге и, кроме этого, собственные значения $\lambda_i(\varepsilon)$ функции L_ε, соответственно пронумерованные, удовлетворяют $|\lambda_i(\varepsilon)| < 1 - c\varepsilon^k$ для $i = 1, \dots, r$, $|\lambda_i(\varepsilon)| > 1 - c\varepsilon^k$ для $i = r+1, \dots, n$, при некоторых константах $c > 0$ и малом $\varepsilon > 0$, тогда функция L_ε будет сильно k-гиперболической.*

Замечание 2. Разница между нашей теоремой 4 и теоремой 2.2 работы [5] в том, что в последней предполагается $L_\varepsilon = \mathbb{I} + \varepsilon L_1 + \dots + \varepsilon^k L_k$ и что собственные значения L_1 различны.

Мы можем улучшить теорему 2 следующим образом.

Теорема 5. *Пусть все собственные значения A — различные комплексные числа на единичном круге. Пусть $x_\varepsilon = O(\varepsilon)$ — единственное решение уравнения $g_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Если*

$$D_x g_\varepsilon(x_\varepsilon) = G_{\varepsilon,k} + o(\varepsilon^k) := A^{-1} + \varepsilon G_1 + \dots + \varepsilon^k G_k + o(\varepsilon^k),$$

где матричнозначная функция $G_{\varepsilon,k}$ k-гиперболическая, то $D_x g_\varepsilon(x_\varepsilon)$ будет гиперболической с тем же типом гиперболичности, что и $G_{\varepsilon,k}$, в частности $G_{\varepsilon,k}$ будет k-гиперболической, если она удовлетворяет предположениям теоремы 4.

Из теоремы 5 мы получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Предположим, что все собственные значения A — различные комплексные числа на единичном круге. Пусть собственные значения $\lambda_i(\varepsilon)$ разложения $A^{-1} + \varepsilon G_1 + \dots + \varepsilon^k G_k$, соответственно пронумерованные, удовлетворяют $|\lambda_i(\varepsilon)| < 1 - c\varepsilon^k$ при $i = 1, \dots, r$, $|\lambda_i(\varepsilon)| > 1 - c\varepsilon^k$ при $i = r+1, \dots, n$, для некоторых констант $c > 0$ и малого $\varepsilon > 0$. Тогда единственное симметрическое и T-периодическое решение уравнения* (1) *гиперболично при любом малом $\varepsilon > 0$.*

5. Пример. Рассмотрим в плоскости дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon(f_1(x_1, x_2) + h_1(t)), \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon(f_2(x_1, x_2) + h_2(t)) \end{aligned} \tag{5}$$

с гладкими функциями $f_{1,2}$, $h_{1,2}$, $T = \pi/2$, $p = 4$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Из условия симметричности (2) вытекают следующие свойства:

$$f_1(x_1, x_2) = f_2(-x_2, x_1), \qquad f_2(x_1, x_2) = -f_1(-x_2, x_1), \tag{7}$$

$$h_1\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -h_2(t), \qquad h_2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = h_1(t). \tag{8}$$

Отметим, что из (8) мы получаем $h_{1,2}(t + \pi) = -h_{1,2}(t)$ и

$$\int_0^{2\pi} h_{1,2}(t)\, dt = 0.$$

Следовательно, $P_1(x) = \dfrac{d}{d\varepsilon}\varphi_0(x, pT)$ [6–10] принимает форму

$$P_1(x) = 2\pi(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)), \qquad x = (x_1, x_2). \tag{9}$$

Условия симметричности (7) выполняются, к примеру, для полинома

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= a_0 x_1 + b_0 x_2 + \sum_{\substack{j,k=0,\ j+k\geqslant 3\\ 2|j+k+1}}^{m} (a_{jk} x_1^j x_2^k + b_{kj} x_1^k x_2^j), \\ f_2(x_1, x_2) &= -b_0 x_1 + a_0 x_2 - \sum_{\substack{j,k=0,\ j+k\geqslant 3\\ 2|j+k+1}}^{m} ((-1)^k b_{kj} x_1^j x_2^k + (-1)^j a_{jk} x_1^k x_2^j). \end{aligned} \tag{10}$$

Следовательно, $D_x P_1(0) = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix}$. Из теоремы 1 мы знаем, что только $x_0(t) = O(\varepsilon)$ является симметрическим и $\pi/2$-периодическим решением уравнения (5), которое, кроме этого, асимптотически устойчиво (соответственно, репеллер), если $a_0 < 0$ (соответственно, $a_0 > 0$), при малом $\varepsilon > 0$. Для дальнейших исследований нам понадобится вычислить слагаемые более высоких порядков при $a_0 = 0$, но этого мы здесь приводить не будем, поскольку в полиномах общего вида (10) эти вычисления занимают много места. Мы ограничимся рассмотрением только специфических случаев.

Вырожденный случай. Если $a_0 = b_0 = 0$, то $D_x P_1(0) = 0$ и, понятно, нельзя применить общую классическую теорему [6–10], но теорема 1 гарантирует существование и единственность решения $x_0(t)$. В этом одно из преимуществ наших результатов. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon(a_j x_1^j + b_j x_2^j + h_1(t)), \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon(-b_j x_1^j + a_j x_2^j + h_2(t)), \end{aligned} \tag{11}$$

где a_j, $b_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 3$ нечетные и $h_{1,2} \neq 0$ удовлетворяют (8). Линеаризация (11) по $x_0(t) = (x_{1,0}(t), x_{2,0}(t))$ принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varepsilon(j a_j x_{1,0}(t)^{j-1} x_1 + j b_j x_{2,0}(t)^{j-1} x_2), \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon(-j b_j x_{1,0}(t)^{j-1} x_1 + j a_j x_{2,0}(t)^{j-1} x_2). \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть $X_\varepsilon(t)$ — фундаментальное матричное решение задачи (12). Тогда, в обозначениях пп. 2, 3, мы получим, что $D_x g_\varepsilon(x_\varepsilon) = A^{-1} X_\varepsilon(\pi/2)$ и $D_x P_\varepsilon(x_\varepsilon) = X_\varepsilon(2\pi)$ при $x_\varepsilon = x_0(0)$. Далее, $\sigma(A^{-1} X_0(\pi/2)) = \{e^{\pm\pi\imath/2}\}$. Таким образом, $\sigma(A^{-1} X_\varepsilon(\pi/2)) = \{\lambda_\varepsilon, \overline{\lambda}_\varepsilon\}$ стремится к $\{e^{\pm\pi\imath/2}\}$. Пусть $\sigma(X_\varepsilon(2\pi)) = \{\lambda_{\varepsilon,1}, \lambda_{\varepsilon,2}\}$. Тогда, применяя теорему Данфорда о спектральных отображениях [11], что

$$\sigma(D_x P_\varepsilon(x_\varepsilon)) = [\sigma(D_x g_\varepsilon(x_\varepsilon))]^p,$$

получим, что $\lambda_{\varepsilon,1} = \lambda_\varepsilon^4$ и $\lambda_{\varepsilon,2} = (\overline{\lambda}_\varepsilon)^4 = \overline{\lambda_\varepsilon^4} = \overline{\lambda}_{\varepsilon,1}$. С другой стороны, учитывая теорему Лиувилля [11],

$$\lambda_{\varepsilon,1}\lambda_{\varepsilon,2} = \det X_\varepsilon(2\pi) = e^{\int_0^{2\pi} j a_j (x_{1,0}(t)^{j-1} + x_{2,0}(t)^{j-1}) dt}.$$

Т. е. $\int\limits_0^{2\pi}(x_{1,0}(t)^{j-1} + x_{2,0}(t)^{j-1})\,dt > 0$, видим, что $|\lambda_{\varepsilon,1}| = |\lambda_{\varepsilon,2}| < 1$ при $a_j < 0$ и $|\lambda_{\varepsilon,1}| = |\lambda_{\varepsilon,2}| > 1$ при $a_j > 0$. Далее, тот факт, что $P_1(x) = 0$ принимает форму

$$a_j x_1^j + b_j x_2^j = 0, \qquad -b_j x_1^j + a_j x_2^j = 0, \tag{13}$$

дает $(x_1 x_2)^j (a_j^2 + b_j^2) = 0$. Таким образом, (13) имеет только нулевое решение $x_1 = x_2 = 0$. Подводя итоги, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Слабонелинейная система* (11) *имеет только* 2π*-периодическое решение* $x_0(t) = O(\varepsilon)$ *при малом* $\varepsilon > 0$*, которое, кроме того,* $-\pi/2$*-симметрическое, т. е. удовлетворяет условию*

$$x_0\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_0(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Если $a_j < 0$*, то* $x_0(t)$ *будет глобально асимптотически устойчивым решением, и если* $a_j > 0$*, то* $x_0(t)$ *будет глобальным репеллером.*

Невырожденный случай. Чтобы получить самый интересный результат, мы рассмотрим следующий простой вид уравнений (10):

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 + a x_1^2 x_2 + b x_1 x_2^2, \\ f_2(x_1, x_2) &= -x_1 + x_2 + b x_1^2 x_2 - a x_1 x_2^2, \end{aligned} \tag{15}$$

где a, $b \in \mathbb{R}$ — константы, $(a, b) \neq (0, 0)$. Следовательно, $x_0(t)$ — репеллер при малом $\varepsilon > 0$. Мы намереваемся найти больше 2π-периодических решений уравнений (5) вида (15). С этой целью решим систему

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + a x_1^2 x_2 + b x_1 x_2^2 = 0, \\ & -x_1 + x_2 + b x_1^2 x_2 - a x_1 x_2^2 = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

что дает

$$x_2(2 + (a + b)x_1^2 - (a - b)x_1) = 0. \tag{17}$$

При $x_2 = 0$ из (16) получаем решение $x_1 = 0$, т. е. опять получаем $x_0(t)$. Если $x_2 \neq 0$ и $a = b \geqslant 0$, то (17) не имеет больше решений. Таким образом, мы предполагаем, что $a \neq b$ и из (17) получаем, что $x_1 \neq 0$ наряду с

$$x_2 = \frac{(a + b)x_2^2 + 2}{(a - b)x_1}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в первое из уравнений (16) и производя некоторые преобразования, получаем

$$2(a + b) + 4(a^2 + b^2)x_1^2 + (a + b)(a^2 + b^2)x_1^4 = 0. \tag{19}$$

Если $a + b = 0$, то из (19) вычисляем $x_1 = 0$, и, таким образом, снова имеем $x_2 = 0$. Предположим, что $a + b \neq 0$, тогда (19) дает

$$x_{1,+}^2 = \frac{\sqrt{2}(a - b) - 2\sqrt{a^2 + b^2}}{(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad x_{1,-}^2 = -\frac{\sqrt{2}(a - b) + 2\sqrt{a^2 + b^2}}{(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{20}$$

Легко видеть, что

$$\sqrt{2}(a-b)-2\sqrt{a^2+b^2}<0, \qquad \sqrt{2}(a-b)+2\sqrt{a^2+b^2}>0$$

при $a+b\neq 0$. Таким образом, (20) имеет действительные корни тогда и только тогда, когда $a+b<0$. Дальше предполагаем, что это условие выполняется. Используя (18), мы получаем четыре корня уравнения (16). Согласно (7), система уравнений (16) эквивариантна относительно симметрии (6), эти решения поворотно симметричны. Мы концентрируемся на первом решении, заданном

$$x_{1,+}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}(a-b)-2\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}}, \qquad x_{2,+}=\sqrt{\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}(\sqrt{2}(a-b)-2\sqrt{a^2+b^2})}}. \tag{21}$$

Учитывая (9) и (15), получаем

$$D_xP_1(x_{1,+},x_{2,+})=\frac{2\pi}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}(a-b)\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2}(2a^2+ab+b^2) & (b-a)\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2}(a^2+ab+2b^2)\\ (a-b)\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2}(a^2+ab+2b^2) & (a-b)\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{2}(a^2+ab+2b^2)\end{pmatrix}.$$

Интересно отметить, что $\det D_xP_1(x_{1,+},x_{2,+}) = -16\pi$. Собственные значения $D_xP_1(x_{1,+},x_{2,+})$ задаются

$$\lambda_{\pm}=2\pi\frac{a-b\mp\sqrt{9a^2+14ab+9b^2}}{a+b}.$$

Из предположения, что $a+b<0$, получаем, что $\lambda_+>0$ и $\lambda_-<0$.

Подводя итоги, из всего вышеизложенного мы приходим к следующей теореме.

Теорема 8. *Рассмотрим*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\varepsilon(x_1+x_2+ax_1^2x_2+bx_1x_2^2+h_1(t)),\\ \dot{x}_2&=\varepsilon(-x_1+x_2+bx_1^2x_2-ax_1x_2^2+h_2(t)),\end{aligned} \tag{22}$$

где a, $b\in\mathbb{R}$ — константы с $(a,b)\neq(0,0)$, $h_{1,2}$ — непрерывные функции, удовлетворяющие (8) *и $\varepsilon>0$ — малый параметр. Если $a+b\geqslant 0$, то в уравнении* (22) *будет только 2π-периодическое решение $x_0(t)=O(\varepsilon)$, которое, кроме того, является репеллером и $-\pi/2$-симметрическое, т. е. удовлетворяет условию* (14). *Если $a+b<0$, то уравнение* (22) *будет иметь, кроме этого, еще четыре 2π-периодических решения $x_j(t)$, $j=\overline{1,4}$, которые будут гиперболическими с одинаковым типом гиперболичности, а также орбитально $-\pi/2$-симметрическими друг к другу.*

Работа выполнена при частичной поддержке грантом National Scholarship Programme of the Slovak Republic, грантами Президиума НАН Украины, No. 0108U004 117, и Государственного фонда фундаментальных исследований, GP/F26/0154, а также Grant VEGA-SAV, 2/7140/27.

1. *Aizovici S., Fečkan M.* Forced symmetric oscillations of evolution equations // Nonlinear Anal. – 2006. – **64**. – P. 1621–1640.
2. *Aizovici S., Pavel N. H.* Anti-periodic solutions to a class of nonlinear differential equations in Hilbert space // J. Funct. Anal. – 1991. – **99**. – P. 387–408.

3. *Fečkan M., Ma R., Thompson B.* Forced symmetric oscillations // Bull. Belg. Math. Soc. – 2007. – **14**. – P. 73–85.
4. *Mucoz-Almaraz F. J., Freire E., Galan-Vioque J., Vanderbauwhede A.* Continuation of normal doubly symmetric orbits in conservative reversible systems // Celest. Mech. Dyn. Astr. – 2007. – **97**. – P. 17–47.
5. *Murdock J., Robinson C.* Qualitative dynamics from asymptotic expansions: local theory // J. Different. Equat. – 1980. – **36**. – P. 425–441.
6. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht: VSP, 2004. – 317 p.
7. *Митропольський Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
8. *Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L.* Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems. Stability and Control: Theory, Methods and Applications, 14. – London, 2003. – 368 p.
9. *Montgomery J. T.* Existence and stability of periodic motion under higher order averaging // J. Differen. Equat. – 1986. – **64**. – P. 67–78.
10. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – Москва: Наука, 1987. – 303 с.
11. *Irwin M. C.* Smooth dynamical systems. – London: Academic Press, 1980. – 260 p.

Институт математики НАН Украины, Киев
Математический институт САН, Братислава, Словакия
Университет Комениуса, Братислава, Словакия

Поступило в редакцию 04.08.2008

N. Z. Dilna, M. Fečkan

About the uniqueness and stability of symmetric and periodic solutions of weakly nonlinear ordinary differential equations

We show the existence of unique periodic and symmetric solutions of weakly nonlinear ordinary differential equations. Conditions for the stability of these solutions are established as well.