УДК 517.988

© 2009

Академік НАН України **В. Л. Макаров, В. В. Хлобистов, І. І. Демків**

Інтерполяція функціоналів багатьох змінних

Побудовані інтерполяційні поліноміальні формули для функціоналів та оператрів на лінійних топологічних просторах.

У роботі узагальнюються результати інтерполяції функцій багатьох змінних на функціонали та оператори, що визначені в лінійних топологічних та конкретному функціональному просторах. З наведених інтерполяційних формул як частинний випадок отримуються як раніше відомі [1–4], так і класичні інтерполяційні структури для функцій багатьох змінних (див., напр., [5]).

1. Інтерполяційні формули в лінійних топологічних просторах. Перед тим як викласти ці інтерполяційні структури, введемо такі позначення. Нехай $F(x, y, \ldots, z)$ — функціонал m змінних $x, y, \ldots, z$, $x \in X$, $y \in Y, \ldots, z \in Z$, де $X, Y, \ldots, Z$ — лінійні топологічні простори; $g_{\tau_{is}}$ — лінійні оператори, $g_{\tau_{i1}} \colon X \longrightarrow X$, $g_{\tau_{i2}} \colon Y \longrightarrow Y$, $\ldots$, $g_{\tau_{im}} \colon Z \longrightarrow Z$, i — індекс пробігає деякі множини натуральних чисел, $g_{\tau_{is}} (s = 1, 2, \ldots, m)$ залежать від скалярних аргументів τ_{is} з $[0, 1]$ та мають перші похідні за цими аргументами, $g_0 = 0$, $g_1 = I$, де 0 та I — нуль-оператор та тотожний відповідно; $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, i_1$, $y_i \in Y$, $i = 1, 2, \ldots, i_2$, $\ldots$, $z_i \in Z$, $i = 1, 2, \ldots, i_m$ — вузли інтерполяції за кожною змінною.

Ми пропонуємо інтерполяційний поліном n-го степеня для функціонала багатьох змінних такого вигляду:

$$P_{m,n}(F; x, y, \ldots, z) = F(x_0, y_0, \ldots, z_0) + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=k} F^{i_1+i_2+\cdots+i_m} \times$$
$$\times \left(x_0 + \sum_{i=1}^{i_1} g_{\tau_{i1}}(x_i - x_{i-1}), y_0 + \sum_{i=1}^{i_2} g_{\tau_{i2}}(y_i - y_{i-1}), \ \ldots, \ z_0 + \sum_{i=1}^{i_m} g_{\tau_{im}}(z_i - z_{i-1})\right) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{i_1} dg_{\tau_{i1}}(x_i - x_{i-1}) \prod_{i=1}^{i_2} dg_{\tau_{i2}}(y_i - y_{i-1}) \cdots \prod_{i=1}^{i_m} dg_{\tau_{im}}(z_i - z_{i-1}), \tag{1}$$

де $\Omega_k = \Omega_{i_1} \times \Omega_{i_2} \times \cdots \times \Omega_{i_m}$, $i_1 + i_2 + \cdots + i_m = k$, $\Omega_{i_s} = \{(\tau_{1s}, \tau_{2s}, \ldots, \tau_{i_s s}) \colon 0 \leqslant \tau_{1s} \leqslant 1, 0 \leqslant \tau_{2s} \leqslant \tau_{1s}, \ldots, 0 \leqslant \tau_{i_s s} \leqslant \tau_{i_s-1,s}\}$, $s = 1, 2, \ldots, m$, і похідні від F розуміються в сенсі Гато.

Цей інтерполянт має вузлами інтерполяції "точки" $(x_p, y_q, \ldots, z_r)$, а якщо $X = Y = \cdots = Z = \mathbb{R}^1$, то він перетворюється в поліном Ньютона (поліном найменшого степеня) для функції m змінних. Уникаючи громіздких викладок, проілюструємо цей факт для випадку $m = n = 2$.

Виходячи з формули (1), маємо

$$P_{2,2}(F; x, y) = F(x_0, y_0) + \int\limits_0^1 F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0)\, dg_{\tau_{11}}(x - x_0) +$$

$$+\int_0^1 F'(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0))\, dg_{\tau_{12}}(y - y_0) +$$

$$+\int_0^1\int_0^{\tau_{11}} F''(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0) + g_{\tau_{21}}(x_2 - x_1), y_0)\, dg_{\tau_{21}}(x - x_1)\, dg_{\tau_{11}}(x - x_0) +$$

$$+\int_0^1\int_0^1 F''(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0))\, dg_{\tau_{11}}(x - x_0)\, dg_{\tau_{12}}(y - y_0) +$$

$$+\int_0^1\int_0^{\tau_{12}} F''(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0) + g_{\tau_{22}}(y_2 - y_1))\, dg_{\tau_{22}}(y - y_1)\, dg_{\tau_{12}}(y - y_0). \qquad (2)$$

Покажемо, що, як і для функції двох змінних, вузлами інтерполяції будуть шість "точок": (x_0, y_0), (x_1, y_0), (x_2, y_0), (x_0, y_1), (x_1, y_1), (x_0, y_2).

Маємо $P_{2,2}(F; x_0, y_0) = F(x_0, y_0)$,

$$P_{2,2}(F; x_1, y_0) = F(x_0, y_0) + \int_0^1 F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0)\, dg_{\tau_{11}}(x_1 - x_0) =$$

$$= F(x_0, y_0) + \int_0^1 d_{\tau_{11}} F(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0) = F(x_1, y_0).$$

Так само $P_{2,2}(F; x_0, y_1) = F(x_0, y_1)$. Далі,

$$P_{2,2}(F; x_2, y_0) = F(x_0, y_0) + \int_0^1 F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0)\, dg_{\tau_{11}}(x_2 - x_0) +$$

$$+\int_0^1\int_0^{\tau_{11}} F''\big(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0) + g_{\tau_{21}}(x_2 - x_1), y_0\big)\, dg_{\tau_{21}}(x_2 - x_1)\, dg_{\tau_{11}}(x_2 - x_0). \qquad (3)$$

Враховуючи, що

$$\int_0^1\int_0^{\tau_{11}} F''(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0) + g_{\tau_{21}}(x_2 - x_1), y_0)\, dg_{\tau_{21}}(x_2 - x_1)\, dg_{\tau_{11}}(x_2 - x_0) =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\tau_{11}} d_{\tau_{21}} F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0) + g_{\tau_{21}}(x_2 - x_1), y_0)\, dg_{\tau_{11}}(x_2 - x_0) =$$

$$= \int_0^1 F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_2 - x_0), y_0) dg_{\tau_{11}}(x_2 - x_0) - \int_0^1 F'(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1 - x_0), y_0) dg_{\tau_{11}}(x_2 - x_0),$$

з (3) маємо

$$P_{2,2}(F;x_2,y_0) = F(x_0,y_0) + \int\limits_0^1 F'\bigl(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_2-x_0), y_0\bigr)\, dg_{\tau_{11}}(x_2-x_0) =$$

$$= F(x_0,y_0) + \int\limits_0^1 d_{\tau_{11}} F(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_2-x_0), y_0) = F(x_2,y_0).$$

Аналогічно отримуємо, що $P_{2,2}(F;x_0,y_2) = F(x_0,y_2)$.

І, нарешті,

$$P_{2,2}(F;x_1,y_1) = F(x_0,y_0) + \int\limits_0^1 F'\bigl(x_0 + g_{\tau_{11}}(x_1-x_0), y_0\bigr)\, dg_{\tau_{11}}(x_1-x_0) +$$

$$+ \int\limits_0^1 F'(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1-y_0))\, dg_{\tau_{12}} +$$

$$+ \int\limits_0^1\int\limits_0^1 F''(x_0 + dg_{\tau_{12}}(x_1-x_0), y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1-y_0))\, dg_{\tau_{11}}(x_1-x_0)\, dg_{\tau_{12}}(y_1-y_0) =$$

$$= F(x_0,y_0) + F(x_1,y_0) - F(x_0,y_0) + F(x_0,y_1) - F(x_0,y_0) +$$

$$+ \int\limits_0^1 F'(x_1, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1-y_0))\, dg_{\tau_{12}}(y_1-y_0) -$$

$$- \int\limits_0^1 F'(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1-y_0))\, dg_{\tau_{12}}(y_1-y_0) = F(x_1,y_1).$$

Зауважимо, що в наведених перетвореннях ми користувалися правилом диференціювання функціонала за параметром [6]. Таким чином, інтерполяційність $P_{2,2}(F;x,y)$ у перелічених вище вузлах доведена.

Нарешті розглянемо випадок, коли в інтерполяційному поліномі (2) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g_{\tau_{i1}} = \tau_{i1}$, $g_{\tau_{i2}} = \tau_{i2}$, та покажемо, що тоді він перетворюється у звичайний поліном Ньютона другого степеня для функцій двох змінних.

Дійсно, маємо

$$\int\limits_0^1 F'(x_0 + \tau_{11}(x_1-x_0), y_0)\, d\tau_{11}(x-x_0) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\int\limits_0^1 d_{\tau_{11}} F(x_0 + \tau_{11}(x_1-x_0), y_0) =$$

$$= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}[F(x_1,y_0) - F(x_0,y_0)] = F(x_0,x_1,y_0)(x-x_0).$$

Аналогічно,

$$\int_0^1 F'(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0))\, dg_{\tau_{12}}(y - y_0) = F(x_0, y_1, y_2)(y - y_0).$$

Далі:

$$\int_0^1\int_0^{\tau_{11}} F''(x_0 + \tau_{11}(x_1 - x_0) + \tau_{12}(x_2 - x_1), y_0) d\tau_{12}(x - x_1)\, d\tau_{11}(x - x_0) =$$

$$= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\int_0^1 \int_0^{\tau_{11}} d_{\tau_{12}} F'(x_0 + \tau_{11}(x_1 - x_0) + \tau_{12}(x_2 - x_1), y_0) d\tau_{11}(x - x_0) =$$

$$= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \int_0^1 \{F'(x_0 + \tau_{11}(x_2 - x_0), y_0) - F'(x_0 + \tau_{11}(x_1 - x_0), y_0)\} d\tau_{11}(x - x_0) =$$

$$= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}[F(x_2, y_0) - F(x_0, y_0)] - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}[F(x_1, y_0) - F(x_0, y_0)] =$$

$$= \left[\frac{F(x_0; x_2; y_0)}{x_2 - x_1} - \frac{F(x_0; x_1; y_0)}{x_2 - x_1}\right](x - x_0)(x - x_1) = F(x_0; x_1; x_2; y_0)(x - x_0)(x - x_1).$$

Аналогічно,

$$\int_0^1\int_0^{\tau_{12}} F''(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0) + \tau_{22}(y_2 - y_1)) d\tau_{22}(y - y_1)\, d\tau_{11}(y - y_0) =$$

$$= F(x_0; y_0; y_1; y_2)(y - y_0)(y - y_1).$$

І, нарешті,

$$\int_0^1 \int_0^1 F''(x_0 + \tau_{11}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0)) d\tau_{11}(x - x_0)\, d\tau_{12}(y - y_0) =$$

$$= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_0^1\int_0^1 d_{\tau_{11}} F'(x_0 + \tau_{11}(x_1 - x_0), y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0))\, d\tau_{12}(y - y_0) =$$

$$= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_0^1 \{F'(x_1, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0)) - F'(x_0, y_0 + g_{\tau_{12}}(y_1 - y_0))\} d\tau_{12}(y_1 - y_0) =$$

$$= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\{F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0) - (F(x_0, y_1) - F(x_0, y_0))\} =$$

$$= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y - y_0)[F(x_1; y_0, y_1) - F(x_0, y_0, y_1)] = F(x_0; x_1; y_0; y_1)(x - x_0)(y - y_0).$$

Остаточно маємо

$$P_{2,2}(F;x,y) = F(x_0,y_0) + F(x_0;x_1;y_0)(x-x_0) + F(x_0;y_0;y_1)(y-y_0) + \\ + F(x_0;x_1;x_2;y_0)(x-x_0)(x-x_1) + F(x_0;x_1;y_0;y_1)(x-x_0)(y-y_0) + \\ + F(x_0;y_0;y_1;y_2)(y-y_0)(y-y_1). \qquad (4)$$

Таким чином, отримано поліном Ньютона другого степеня для функції двох змінних (див. [5]). Зауважимо, що з відомих інтерполяційних формул [1–3] у лінійних топологічних просторах не можна отримати інтерполянти для функцій багатьох змінних у звичайному сенсі.

Зауважимо, що попередні міркування справедливі і для нелінійних операторів (відображень). Треба тільки користуватися правилом диференціювання оператора за параметром (див. [7]). Таким чином, має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконується умова леми 3.2 з [7]. Тоді інтерполяційна формула* (1) *є інтерполянтом для оператора багатьох змінних у лінійних топологічних просторах* X, $Y, \ldots, Z$ *за умови існування відповідних інтегралів.*

Відзначимо, що наведена інтерполяційна формула (1) узагальнює раніше існуючі інтерполяційні формули типу Ньютона для оператора однієї змінної [1–3], а у випадку $\mathbb{R}^n$ перетворюється на поліном Ньютона функції багатьох змінних.

2. Інтерполяційні поліноми в просторі $\mathbb{Q}^m[0,1]$ з континуальними вузлами. Відомо, що в нескінченно вимірних просторах скінченна множина вузлів не гарантує єдиності інтерполянта та його інваріантності щодо поліномів відповідного степеня. У роботах [1–3] континуальна інформація, що використовується для побудови інтерполяційного полінома, не забезпечує єдиності інтерполяційної формули. Крім того, ця формула має скінченну множину вузлів, що неприродно. У [3] викладена так звана "Kergin interpolation" як для функції багатьох змінних, так і в банаховому просторі. Відзначимо, по-перше, що наведені там інтерполяційні формули з точністю до еквівалентних перетворень інтегралів збігаються з формулами [1, 2], отриманими ще в 60-х роках минулого століття, а по-друге, коли $X = Y = \ldots = Z = \mathbb{R}^1$, то з них неможливо отримати класичні інтерполяційні формули Ньютона для функцій багатьох змінних (див. [5]). У [8] побудовано функціональний інтерполяційний поліном типу Ньютона з континуальними вузлами в просторі $\mathbb{Q}[0,1]$ кусково-неперервних функцій, визначених на відрізку $[0,1]$, що має властивості єдиності на множині поліномів та інваріантності щодо поліномів відповідного степеня. Нашою метою є побудова інтерполянта з континуальними вузлами для функціонала $F\colon \mathbb{Q}^m[0,1] \to \mathbb{R}^1$, але це буде інтерполянт суттєво іншої структури в порівнянні з наведеним у [1].

Введемо необхідні для подальшого позначення:

$$\begin{aligned} &\overline{x}_{i_1}(t,u_1,u_2,\ldots,u_{i_1}) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{i_1} H(u_i - t)(x_i(t) - x_{i-1}(t)),\\ &\overline{y}_{i_1}(t,v_1,v_2,\ldots,v_{i_2}) = y_0(t) + \sum_{i=1}^{i_2} H(v_i - t)(y_i(t) - y_{i-1}(t)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\overline{z}_{i_m}(t,w_1,w_2,\ldots,w_{i_m}) = z_0(t) + \sum_{i=1}^{i_m} H(w_i - t)(z_i(t) - z_{i-1}(t)), \end{aligned} \qquad (5)$$

де $H(s)$ — функція Хевісайда; $x_p(t), y_q(t), \ldots, z_r(t) \in \mathbb{C}[0,1]$; множини скалярних параметрів

$$\Omega_{i_1}=\{(u_1,u_2,\ldots,u_{i_1})\colon 0\leqslant u_1\leqslant 1, 0\leqslant u_2\leqslant u_1,\ldots,0\leqslant u_{i_1}\leqslant u_{i_1-1}\},$$

$$\Omega_{i_2}=\{(v_1,v_2,\ldots,v_{i_2})\colon 0\leqslant v_1\leqslant 1, 0\leqslant v_2\leqslant v_1,\ldots,0\leqslant v_{i_2}\leqslant v_{i_2-1}\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\Omega_{i_m}=\{(w_1,w_2,\ldots,w_{i_m})\colon 0\leqslant w_1\leqslant 1, 0\leqslant w_2\leqslant w_1,\ldots,0\leqslant w_{i_m}\leqslant w_{i_m-1}\};$$

$$\Omega_k=\Omega_{i_1}\times\Omega_{i_2}\times\cdots\times\Omega_{i_m},\qquad i_1+i_2+\cdots+i_m=k,\qquad k=1,2,\ldots,n;$$

$$\mathbb{D}^{i_1+i_2+\cdots+i_m}=\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_m}}{\partial u_1\partial u_2\cdots\partial u_{i_1}\partial v_1\partial v_2\cdots\partial v_{i_2}\cdots\partial w_1\partial w_2\cdots\partial w_{i_m}};$$

$$\pi_{m,n}=\Biggl\{P_{m,n}(x,y,\ldots,z)=K_0+\sum_{p=1}^{n}\int_0^1(p)\int_0^1\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=k}K_{i_1i_2\ldots i_p}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)\times$$
$$\times x_{i_1}(\alpha_1)x_{i_2}(\alpha_2)\cdots x_{i_p}(\alpha_p)d(\alpha_1)d(\alpha_2)\cdots d(\alpha_n),\quad K_{i_1i_2\ldots i_p}\in\mathbb{C}([0,1])^p,$$
$$p=1,2,\ldots,n\Biggr\},\tag{6}$$

де $x_1(\alpha)=x(\alpha)$, $x_2(\alpha)=y(\alpha)$, $\ldots$, $x_m(\alpha)=z(\alpha)$, $x,y,\ldots,z\in\mathbb{Q}[0,1]$.

Задача полягає в побудові на множині $\pi_{m,n}$ полінома $P_{m,n}(F;x,y,\ldots,z)$ з інтерполяційними умовами

$$P_{m,n}(F;\overline{x}_{i_1},\overline{y}_{i_2},\ldots,\overline{z}_{i_m})=F(\overline{x}_{i_1},\overline{y}_{i_2},\ldots\overline{z}_{i_m})$$

для всіх $\overline{x}_{i_1},\overline{y}_{i_2},\ldots,\overline{z}_{i_m}$, визначених на множинах $[0,1]\times\Omega_{i_s}$, $s=1,2,\ldots,m$.

Спираючись на результати [8] щодо побудови інтерполяційної формули типу Ньютона для функціонала $F\colon\mathbb{Q}[0,1]\to\mathbb{R}^1$ та проводячи аналогічні доведення у випадку простору $\mathbb{Q}^m[0,1]$, одержуємо такі твердження.

Теорема 2. *Нехай функціонал $F\colon\mathbb{Q}^m[0,1]\to\mathbb{R}^1$ такий, що*

$$F(\overline{x}_{i_1}(\cdot,u_1,u_2,\ldots,u_{i_1}),\overline{y}_{i_1}(\cdot,v_1,v_2,\ldots,v_{i_2}),\overline{z}_{i_m}(\cdot,w_1,w_2,\ldots,w_{i_m}))\in\mathbb{C}^{(K)}(\Omega_K),\tag{7}$$

і по кожній змінній виконується правило підстановки [8]. Тоді для F інтерполянт типу Ньютона з множини $\pi_{m,n}$ та з інтерполяційними умовами на континуальних вузлах (5) *має вигляд*

$$P_{m,n}(F;x,y,\ldots,z)=F(x_0,y_0,\ldots,z_0)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=k}F(x_0;\ldots;x_{i_1};y_0;\ldots;y_{i_2};\ldots;z_0;\ldots;z_{i_m})\times$$
$$\times(x-x_0)\cdots(x-x_{i_1-1})\cdots(y-y_0)\cdots(y-y_{i_2-1})\cdots(z-z_0)\cdots(z-z_{i_m-1}),\tag{8}$$

де $F(x_0;\ldots;x_{i_1};y_0;\ldots;y_{i_2};\ldots;z_0;\ldots;z_{i_m})$ — оператор розділеної різниці такий, що

$$F(x_0;\ldots;x_{i_1};y_0;\ldots;y_{i_2};\ldots;z_0;\ldots;z_{i_m})(x-x_0)\cdots(x-x_{i_1-1})\times$$
$$\times(y-y_0)\cdots(y-y_{i_2-1})\cdots(z-z_0)\cdots(z-z_{i_m-1})=$$

$$= \int\limits_{\Omega_k} \prod_{i=1}^{i_1} \frac{x(u_i) - x_{i-1}(u_i)}{x_i(u_i) - x_{i-1}(u_i)} \prod_{i=1}^{i_2} \frac{y(v_i) - y_{i-1}(v_i)}{y_i(v_i) - y_{i-1}(v_i)} \cdots \prod_{i=1}^{i_m} \frac{z(w_i) - z_{i-1}(w_i)}{z_i(w_i) - z_{i-1}(w_i)} \times$$
$$\times \mathbb{D}^{i_1+i_2+\cdots+i_m} F(\overline{x}_{i_1}(\cdot, u_1, u_2, \ldots, u_{i_1}), \overline{y}_{i_2}(\cdot, v_1, v_2, \ldots, v_{i_2}), \ldots,$$
$$\ldots, \overline{z}_{i_m}(\cdot, w_1, w_2, \ldots, w_{i_m}))\, dV_k, \tag{9}$$

$dV_k = \prod\limits_{i=1}^{i_1} du_i \prod\limits_{i=1}^{i_2} dv_i \cdots \prod\limits_{i=1}^{i_m} dw_i$, $i_1 + i_2 + \cdots + i_m = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ *за умови існування відповідних інтегралів в* (9).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді інтерполянт типу Ньютона вигляду* (8), (9) *буде единим інтерполянтом серед усіх поліномів з* $\pi_{m,n}$ *на континуальних вузлах* (5) *та інваріантний щодо поліномів відповідного степеня.*

Порівнявши дві інтерполяційні структури (1) та (8), (9), можна зробити такий висновок. Формула (1) інтерполює функціонал на дискретній множині вузлів, а для самого функціонала необхідно виконання лише правила диференціювання за параметром [6]. Інтерполяційна формула (8), (9) має континуальні вузли, єдина в класі $\pi_{m,n}$ та зберігає поліноми відповідного степеня, але вимагає від функціонала певної гладкості в сенсі (7) та правила підстановки [8]. Відзначимо, що у випадку негладкого функціонала (наприклад, у випадку функції багатьох змінних) замість формули (9) можна записати аналогічну формулу з інтегралами від узагальнених функцій, якщо вони існують. Хоча формули (1) та (8), (9) різні, але з урахуванням вищевикладеного для функції багатьох змінних вони перетворюються на поліноми Ньютона, що тотожно збігаються.

1. *Ульм С., Полль В.* О построении обобщенных разделенных разностей // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1969. – **18**, № 1. – С. 100–102.
2. *Соболевский П. И.* Интерполяция функционалов и некоторые приближенные формулы для интегралов по гауссовой мере // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1975. – № 2. – С. 5–12.
3. *Filipsson L.* Kergin interpolation in Banach spaces // J. Approx. Theory. – 2004. – **127**. – P. 108–123.
4. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – 278 с.
5. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. – Москва: Наука, 1966. – 632 с.
6. *Авербух В. И., Смолянов О. Г.* Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // Успехи мат. наук. – 1967. – **22**, № 6. – С. 201–260.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 407 с.
8. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф., Михальчук Б. Р.* Интерполяционные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 779–790.

Інститут математики НАН України, Київ
Національний університет “Львівська політехніка”

Надійшло до редакції 29.08.2008

Academician of the NAS of Ukraine **V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, I. I. Demkiv**

Interpolation of multivariable functionals

Polynomial interpolation formulas are given for multivariable functionals and operators on linear topological spaces.