УДК 519.8


**Н. В. Семенова, Л. М. Колєчкіна**

# Поліедральний підхід до розв'язання одного класу векторних задач комбінаторної оптимізації

*(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)*

*Розглядаються багатокритеріальні задачі дискретної оптимізації на допустимій комбінаторній множині полірозміщень. Досліджуються структурні властивості допустимої області і різних видів ефективних розв'язків. На основі розвитку ідей евклідової комбінаторної оптимізації і методу головного критерію розроблений і обгрунтований поліедральний підхід до розв'язання зазначеного класу задач.*

Новим теоретичним підходом для розв'язання важливих задач економіки, проектування складних систем, прийняття рішень в умовах невизначеності тощо є застосування моделей і методів, що об'єднують багатокритеріальність альтернатив і різні комбінаторні властивості допустимої множини. На сьогоднішній день в області дослідження різних класів дискретних та векторних оптимізаційних задач, побудови методів їх розв'язання отримані істотні результати [1–15].

Для розв'язання задач комбінаторної оптимізації розроблені різні обчислювальні методи. Одні з найбільш перспективних з них виділилися в окрему область поліедральної комбінаторики [4–8, 10–13]. Загальна ідея цих методів полягає у встановленні зв'язку екстремальних комбінаторних задач з методами лінійного програмування і виглядає таким чином: елементи допустимої множини інтерпретуються як точки евклідового простору, функції критеріїв і обмежень розглядаються як неперервні. Отже, розв'язується задача знаходження екстремуму функції на опуклій оболонці заданих точок (тобто на опуклому многограннику). Дійсно, екстремум лінійної функції на многограннику досягається в одній з вершин, яка включається в множину елементів, що розглядаються. Задача знаходження екстремуму лінійної функції є задачею лінійного програмування. Особливість розв'язання комбінаторних задач при такому зведенні полягає в тому, що при знаходженні розв'язків варто обмежитися лише вершинами многогранника.

Останнім часом в області дослідження різних класів комбінаторних моделей, розробки нових методів їх розв'язання велика увага приділяється методам, що грунтуються на використанні структурних властивостей комбінаторних множин [2, 4–11, 14, 15]. Використання інформації про структуру опуклої оболонки допустимих розв'язків, яка є основою для багатьох методів, — один із самих успішних на сьогоднішній день підходів до розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Але при розв'язанні таких задач виникають проблеми, пов'язані зі складністю математичних моделей, великим обсягом інформації та ін. У даній роботі формулюється і досліджується нова актуальна багатокритеріальна задача на допустимій комбінаторній множині полірозміщень. Особливість роботи полягає у вивченні комбінаторних властивостей многогранників в тісному зв'язку з задачами векторної оптимізації, важливими для практичного застосування.

Властивості евклідових комбінаторних множин описані в багатьох роботах. Поряд з добре відомими евклідовими комбінаторними множинами перестановок, розміщень, сполучень, розбиттів виділяються більш складні структури — полікомбінаторні множині. Інтерес до таких множин зумовлений різними прикладними задачами, оскільки значна їх кількість добре описується за допомогою полікомбінаторних конструкцій [7, 8, 10].

Дана робота продовжує і розвиває дослідження багатокритеріальних задач на комбінаторних та полікомбінаторних множинах, наведених в роботах [4–8, 14, 15]. Для векторних задач комбінаторного типу на множині полірозміщень на основі вивчених властивостей многогранників, які описують опуклу оболонку допустимої множини, запропонований поліедральний підхід до розв'язання, заснований на ідеях методів головного критерію, релаксації, відтинаючих площин.

**1. Постановка задачі.** Як відомо, розміщенням із $q$ елементів по $n$ називається упорядкований набір $a = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ із $n$ елементів, що належать мультимножині $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$. Нехай $A(q,k,n)$ — загальна комбінаторна множин $n$-розміщень, індукована $q > n$ елементами з мультимножини $A$, серед елементів якої $k$ різних. Образ множини $A(q,k,n)$ при відображенні в $\mathbb{R}^n$ позначимо $E(q,k,n)$. Усяка точка $x \in E(q,k,n)$ має таку властивість, що її координати набувають значень з мультимножини $A$ дійсних чисел, тобто $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де $x_j = a_{i_j}$, $a_{i_j} \in A$ $\forall\, i, j \in N_n$.

Подамо множину $N_q$ у вигляді упорядкованого розбиття на $s$, де $s < q$, непорожніх підмножин $J_1, \ldots, J_s$, які попарно не перетинаються, тобто для них виконуються умови: $J_i \bigcap J_j = \varnothing$, $J_i \neq \varnothing$, $J_j \neq \varnothing$, $\forall\, i, j \in N_s$, а також упорядкованого розбиття числа $n$ на $s$ доданків $n_1$, $n_2, \ldots, n_s$, що задовольняють умову $1 \leqslant n_i \leqslant q_i$, $\forall\, i \in N_s$, $|J_i| = q_i$. Очевидно, що $q_1 + q_2 + \ldots + q_s = q$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$. Позначимо $H$ множину елементів вигляду $h = (h(1), \ldots, h(n)) = (h^1, \ldots, h^s)$, де $h(j) \in N_n$, $j \in N_n$, а $h^i$ — довільна перестановка елементів множини $J_i$ $\forall\, i \in N_s$. Нехай підмультимножина $A^i$ мультимножини $A$ складається з тих елементів $A$, номери яких належать множині $J_i$: $A^i = \{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{n_i}^i\}$, $|J_i| = n_i$.

**Означення.** Множину $A(q,k,n,s) = \{(a_{h(1)}, \ldots, a_{h(n)}) \mid a_{h(i)} \in A\ \forall\, i \in N_n, \forall\, h \in H\}$ називають загальною множиною полірозміщень.

Не втрачаючи загальності, упорядкуємо елементи мультимножини $A$ за неспаданням: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. Очевидно, що це упорядкування зберігається і для кожної підмультимножини $A^i$, $i \in N_s$, з $A$.

Розглянемо задачу оптимізації на евклідовій комбінаторній множині

$$Z(\Phi, A(q,k,n,s))\colon\ \max\{\Phi(a) \mid a \in A(q,k,n,s)\},$$

що полягає в максимізації векторного критерію $\Phi(a) = (\Phi_1(a), \ldots, \Phi_l(a))$ на множині полірозміщень, де $\Phi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $i \in N_l$.

**2. Деякі властивості евклідової множини полірозміщень.** Опуклою оболонкою множини полірозміщень $A(q,k,n,s)$ є многогранник полірозміщень $M_{qk}^{ns}(A) = \operatorname{conv} A(q,k,n,s)$, множина вершин якого є підмножиною множини полірозміщень: $\operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \subseteq A(q,k,n,s)$.

**Теорема 1.** *Многогранник полірозміщень $M_{qk}^{ns}(A)$ визначається сукупністю всіх розв'язків такої системи нерівностей:*

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n_i} a_j^i, \qquad i \in N_s, & (1)\\[2ex] \displaystyle\sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \geqslant \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i, \qquad m_i \in N_{q_i-1}, \qquad \alpha_j \in J_i\ \forall\, i \in N_s & (2)\end{array}\right.$$

$$\alpha_j \neq \alpha_t, \qquad \forall\, j \neq t, \qquad \forall\, j, t \in J_i.$$

Розглянемо деякі його властивості і зв'язок із загальною множиною полірозміщень.

Очевидно, що з системи лінійних нерівностей (1), (2) можна виділити $s$ підсистем лінійних нерівностей, що описують многогранники розміщень $M^{n_i}_{q_ik_i}(A^i)$, які є опуклими комбінаціями множини розміщень $a_{h^i}$, $i \in N_s$. Отже,

$$M^{n_i}_{q_ik_i}(A^i) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n_i} \left| \sum_{j=1}^{n_i} x_j \leqslant \sum_{j=1}^{n_i} a^i_{q_i-j}, \sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \geqslant \sum_{j=1}^{m_i} a^i_j \right. \right\},$$

$m_i \in N_{q_i-1}$, $\alpha_j \in J_i$, $\alpha_j \neq \alpha_t$, $\forall\, j \neq t$, $\forall\, j, t \in J_i$, $\forall\, i \in N_s$. Кожний з многогранників $M^{n_i}_{q_ik_i}(A^i)$ є многогранником розміщень.

Як відомо, під добутком многогранників $M_1, \ldots, M_s$ розуміють множину

$$\mathop{\otimes}_{i=1}^{s} M_i = \{x \in \mathbb{R}^{d_1+\cdots+d_s} \mid x = (x_1, \ldots, x_s),\ x_i \in M_i\ \forall\, i \in N_s\},$$

де $M_i$ — $d_i$-вимірний многогранник. Відповідно до твердження 3.2 [12, с. 26] справедлива рівність

$$\mathop{\otimes}_{i=1}^{s} M^{n_i}_{q_ik_i}(A^i) = \{x \in \mathbb{R}^{d_1+\cdots+d_s} \mid x = (x_1, \ldots, x_s), x_i \in M^{n_i}_{q_ik_i}(A^i) \forall\, i \in N_s\},$$

тобто точка $x \in \mathop{\otimes}\limits_{i=1}^{s} M^{n_i}_{q_ik_i}(A^i)$ задовольняє кожну з $s$ підсистем системи (1), (2). Отже, можна стверджувати, що якщо $a_{h^i}$ — вершина многогранника $M^{n_i}_{q_ik_i}(A^i)$, то $a(h) = \mathop{\otimes}\limits_{i=1}^{s} a_{h^i}$, $a(h) = (a_{h^1}, \ldots, a_{h^s})$, де $a(h) \in A(q, k, n, s)$.

**Теорема 2.** *Многогранник полірозміщень $M^{ns}_{qk}(A)$ при $n_i < q_i$ $\forall\, i \in N_s$ комбінаторно еквівалентний многограннику поліперестановок $M^s_{nk}(A)$, що має розмірність $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$.*

Справедливість теореми випливає з того, що $M^{ns}_{qk}(A) = \mathop{\otimes}\limits_{i=1}^{s} M^{n_i}_{q_ik_i}(A^i)$, теореми 4.8 [12, с. 193] та означення многогранника поліперестановок [10].

**Наслідок 1.** *Для числа $r_i(M^{n_i}_{q_ik_i}(A^i))$ $i$-вимірних граней $(0 \leqslant i \leqslant n_i)$ многогранника полірозміщень $M^{n_i}_{q_ik_i}(A^i)$ справедлива формула*

$$r_i(M^{n_i}_{q_ik_i}(A^i)) = \sum \frac{(n_i+1)!}{t^i_1! t^i_2! \cdots t^i_{n_i-i+1}!} \qquad \forall\, i \in N_{n_i},$$

*де підсумовування проводиться за всіма розв'язками рівняння $t^i_1 + t^i_2 + \cdots + t^i_{n_i-i+1} = n_i$ в цілих додатних числах.*

Оскільки множина полірозміщень є підмножиною множини розміщень $A(q, k, n, s) \subset A(q, k, n)\ \forall\, s \in N_n$, то кількість елементів полірозміщень не перевершує загальну кількість елементів множини розміщень.

**Твердження 1.** *Загальне число $A^{ns}_{qk}$ полірозміщень дорівнює*

$$A^{ns}_{qk} = |A(q, k, n, s)| = \prod_{i=1}^{s} \frac{q_i!}{(q_i - n_i)!}.$$

Справедливі такі теореми [10].

**Теорема 3.** $M_{qk}^{ns}(A) = \bigotimes_{i=1}^{s} M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$.

**Теорема 4.** *Множина вершин многогранника $M_{qk}^{ns}(A)$ є підмножиною множини полірозміщень $A(q,k,n,s)$.*

Слід відзначити, що загальне число $p$ лінійних нерівностей, що входять у систему (1), (2) та описують многогранник полірозміщень $M_{qk}^{ns}(A)$, досить велике. У деяких випадках його можна зменшити.

**Твердження 2.** *Якщо з $n$ координат $x_i$, $i \in N_n$, точки $x \in \mathbb{R}^n$ тільки $k$ різних, то число нерівностей системи, що описують опуклий многогранник $M_{qk}^{ns}(A)$, можна зменшити, виключивши з системи $N = \sum_{i=1}^{s} N_i$ нерівностей, де $N_i = 1 + n_i + \sum_{j=i+1}^{n_i} C_{n_i}^{j}$, $i \in$ $\in N_s$.*

**Доведення.** Сукупність нерівностей підсистеми для деякої підмножини $J_i$, $i \in N_s$, системи (1), (2), які мають однакове значення $m_i$ верхньої межі підсумовування, будемо називати $m_i$-ю групою нерівностей цієї підсистеми, де $i \in N_s$. У кожну $m_i$-ту групу входить $C_{q_i}^{m_i}$ нерівностей. Отже, загальне число $p_i$ нерівностей, що описують многогранник $M_{q_i k_i}^{n_i}(A^i)$, дорівнює $p_i = \sum_{i=0}^{q_i} C_{q_i}^{m_i} = 2^{q_i}$, $i \in N_s$. Оскільки з $q_i$ координат $a_j^i$, $j \in J_i$, $k_i$ різних, то з $i$-ї підсистеми нерівностей (1), (2) можна виключити деякі нерівності. З огляду на умови $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_q$ для будь-якого $j \in N_{m_i-1}$, $m_i \leqslant q_i$, $i \leqslant N_s$, справедлива рівність $a_j^i = a_{j+1}^i$. Тому при виконанні нерівностей першої групи в підсистемі (1), (2) будуть також справедливі нерівності другої, третьої, $\ldots$, $m_i$-ї, $i \in N_s$, груп. Дійсно, оскільки $x_j \geqslant a_1^i$, $j \in J_i$, $i \in N_s$, то $\forall\, m_i \in N_n$, $i \in N_s$, виконується умова $\sum_{j=1}^{m_i} x_{\alpha_j} \geqslant m_i a_1^i$. Отже, з кожної підсистеми системи (1), (2), що описує многогранник полірозміщень $M_{qk}^{ns}(A)$, можна виключити нерівності другої, третьої, $\ldots$, $m_i$-ї, $i \in N_s$, груп і загальне число нерівностей у $m_i$ підсистемі буде складати $N_i = 1 + q_i + \sum_{j=i+1}^{q_i} C_{q_i}^{j}$. Аналогічні міркування можна провести, якщо набір чисел $(a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i)$ має властивість $a_j^i = a_{j+1}^i$ $\forall\, j \in N_{n_i-1} \setminus N_{n_i-m_i}$, $i \in N_s$, то в підсистемі системи (1), (2) досить залишити тільки нерівності першої, другої, $\ldots$, $(m_i - j)$-ї груп. Таким чином, число нерівностей, яке можна виключити із системи (1), (2), дорівнюватиме $N = \sum_{i=1}^{s} N_i$.

При відображенні множини полірозміщень $A(q,k,n,s)$ в евклідів простір $\mathbb{R}^n$ сформулюємо задачу $Z(F,X)$ максимізації векторного критерію $F(x)$ на допустимій множині $X$:

$$Z(F,X)\colon\ \max\{F(x) \mid x \in X\}.$$

Кожному елементу $a \in A(q,k,n,s)$ відповідає точка $x \in X$, така, що $F(x) = \Phi(a)$, де $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x))$, $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $i \in N_l$, $X \neq \varnothing$, $\operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \subseteq X \subseteq M_{qk}^{ns}(A) =$ $= \operatorname{conv} A(q,k,n,s)$. Нехай задача $Z(F,X)$ містить також опуклі обмеження, що утворюють замкнуту опуклу множину $D \subset \mathbb{R}^n$ вигляду: $D = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leqslant 0, i \in N_m\}$. Тоді $\operatorname{vert} M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D \subseteq X \subset M_{qk}^{n1} \bigcap D$.

Традиційне поняття оптимальності в задачах багатокритеріальної оптимізації замінюється на поняття Парето-оптимальності (ефективності), слабої ефективності (оптимальності за Слейтером) та строгої ефективності (оптимальності за Смейлом). Отже, під розв'язками задачі $Z(F,X)$ будемо розуміти елементи таких множин: $P(F,X)$ — Парето-оптимальних розв'язків, $\mathrm{Sl}(F,X)$ — слабо ефективних, $\mathrm{Sm}(F,X)$ — строго ефективних розв'язків. Згідно з [3], для $\forall\, x \in X$ справедливі твердження:

$$x \in \mathrm{Sl}(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) > F(x)\} = \varnothing, \tag{3}$$

$$x \in P(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid F(y) \geqslant F(x),\ F(y) \neq F(x)\} = \varnothing, \tag{4}$$

$$x \in \mathrm{Sm}(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X \mid y \neq x,\ F(y) \geqslant F(x)\} = \varnothing, \tag{5}$$

$$\mathrm{Sm}(F,X) \subset P(F,X) \subset \mathrm{Sl}(F,X). \tag{6}$$

Оскільки $|X| < \infty$, то множина $P(F,X) \neq \varnothing$ і зовні стійка [9].

**3. Структурні властивості та умови оптимальності різних множин ефективних розв'язків.**

**Теорема 5.**

$$P(F,G) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A) \subset P(F,X),$$

$$\mathrm{Sl}(F,G) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A) \subset \mathrm{Sl}(F,X),$$

$$\mathrm{Sm}(F,G) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A) \subset \mathrm{Sm}(F,X).$$

Нехай функції $f_i(x)$, $i \in N_l$, векторного критерію $F(x)$ є лінійними: $f_i(x) = \langle c_i, x\rangle$, $c_i$, $i \in N_l$, — вектор-рядок матриці $C \in \mathbb{R}^{n\times l}$. Позначимо $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \geqslant 0\}$ — конус перспективних напрямків [3] задачі $Z(F,X)$, $\mathrm{int}\, K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx > 0\}$ — внутрішність конуса $K$, $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = 0\}$ — ядро лінійного відображення $C\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$. З формул (3)–(5) випливає справедливість тверджень

$$x \in \mathrm{Sl}(C,X) \Leftrightarrow (x + \mathrm{int}\, K) \bigcap X = \varnothing, \tag{7}$$

$$x \in P(C,X) \Leftrightarrow (x + (K \setminus K_0)) \bigcap X = \varnothing, \tag{8}$$

$$x \in \mathrm{Sm}(C,X) \Leftrightarrow (x + K) \bigcap X \setminus \{x\} = \varnothing. \tag{9}$$

**Твердження 3.** *При виконанні умов* $n_i = q_i - 1\ \forall\, i \in N_s$ *справедливі включення* $\mathrm{Sm}(F,X) \subset P(F,X) \subset \mathrm{Sl}(F,X) \subset \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A)$.

**Теорема 6.** *Якщо допустима множина* $X$ *задачі* $Z(F,X)$ *не містить обмежень, які описують опуклу множину* $D$ *або* $M_{qk}^{ns}(A) \subseteq D$ *та* $n_i = q_i - 1\ \forall\, i \in N_s$, *тобто* $X = \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A)$, *то справедливі рівності*

$$P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A) = P(F,X),$$

$$\mathrm{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A) = \mathrm{Sl}(F,X),$$

$$\mathrm{Sm}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A) = \mathrm{Sm}(F,X).$$

**Доведення.** З теореми 5 та умов даної теореми випливає, що $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ справедливе твердження: $x \in \mathrm{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A) \Rightarrow x \in \mathrm{Sl}(F,X)$,

$$x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A) \Rightarrow x \in P(F,X),$$

$$x \in \mathrm{Sm}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A) \Rightarrow x \in \mathrm{Sm}(F,X).$$

Доведемо зворотні імплікації. Нехай $x \in \mathrm{Sl}(F,X)$, звідки, відповідно до твердження 3, випливає, що $x \in \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A)$. Припустимо, від супротивного, що $x \notin \mathrm{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A))$. З огляду на лінійність функцій $f_i(x)$, $i \in N_l$, векторного критерію $F(x)$ відповідно до теореми 5 [3] виконується умова $(x + \mathrm{int}\, K) \bigcap M(x) \neq \varnothing$, тобто в конусі $(x + \mathrm{int}], K)$ лежать деякі точки границі многогранника $M_{qk}^{ns}(A)$, отже існує його вершина, що належить цьому конусу. Останнє в силу формули (7) означає, що $x \notin \mathrm{Sl}(F,X)$ і приводить до протиріччя з умовою теореми. Отже, $\mathrm{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A) = \mathrm{Sl}(F,X)$.

Подібними міркуваннями доводяться інші твердження даної теореми.

**Наслідок 2.** *За умов теореми 6* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *справедливі твердження:*

$$x \in \mathrm{Sl}(F,X) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A),$$

$$x \in P(F,X) \Leftrightarrow x \in P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A),$$

$$x \in \mathrm{Sm}(F,X) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Sm}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A).$$

Якщо $M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D \neq M_{qk}^{ns}(A)$, то справедливі лише достатні умови оптимальності розв'язків.

**Теорема 7.** $P(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \subset P(F,X)$,
$\mathrm{Sl}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \subset \mathrm{Sl}(F,X)$, $\mathrm{Sm}(F, M_{qk}^{ns}(A)) \bigcap D \subset \mathrm{Sm}(F,X)$.

**4. Поліедральний підхід до розв'язання векторних задач на комбінаторній множині полірозміщень.** Структурні властивості допустимої області $X$ та множин ефективних розв'язків, а також лінійність функцій векторного критерію дозволяють звести розв'язання задачі $Z(F,X)$ до розв'язання задачі $Z(F,G)$, визначеної на неперервній допустимій множині $G = M_{qk}^{ns}(A) \bigcap D$. Розвиваючи результати робіт [3–9, 14,15], в даній роботі пропонується і обгрунтовується підхід до розв'язання задачі комбінаторної оптимізації $Z(F,X)$, який базується на її зведенні до задачі, визначеної на опуклій оболонці множини полірозміщень, застосуванні методу головного критерію для розглядуваного класу векторних задач і враховує той факт, що число обмежень досить велике.

**Твердження 4.** *Якщо для елементів мультимножини* $A$ *і коефіцієнтів* $c_j$, $j \in N_n$, *цільової функції задачі* $\mathrm{extr}\left\{ f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid x \in \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A) \right\}$ *виконуються відповідно умови* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ *і* $c_{i_1} \leqslant c_{i_2} \leqslant \cdots \leqslant c_{i_n}$, $i_j$, $j \in N_n$, *то максимум функції* $f(x)$ *на допустимій множині досягається в точці* $\overline{x} = (\overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_n}) \in \mathrm{vert}\, M_{qk}^{ns}(A)$, *що визначається як* $\overline{x}_{i_j} = a_j \forall j \in N_n$, *а мінімум — відповідно в точці* $\overline{\overline{x}} = (\overline{\overline{x}}_{i_1}, \overline{\overline{x}}_{i_2}, \ldots, \overline{\overline{x}}_{i_n})$, *де* $\overline{\overline{x}}_{i_{j+1}} = a_{n-j}$ $\forall j \in N_{n-1} \bigcup \{0\}$.

Справедливість даного твердження очевидна, оскільки найбільше значення суми попарних добутків досягається при зіставленні зростаючої послідовності $c_i$ із зростаючою послідовністю $\overline{x}_i$, а найменше значення суми, відповідно, досягається при зіставленні зростаючої послідовності $c_i$ із спадаючою послідовністю $\overline{\overline{x}}_i$.

Пропонується такий підхід розв'язання розглянутого класу векторних задач. Вхідна багатокритеріальна задача зводиться до задачі оптимізації за одним критерієм $f_r(x)$, $r \in N_l$, що вибирається головним, при умові, що значення всіх інших критеріїв не менше деяких встановлених величин (граничних значень) $t_i$, $i \in N_l \setminus \{r\}$. Таким чином, маємо задачу

$$Z(f_r, X(t_i))\colon\ \max\{f_r(x) \mid f_i(x) \geqslant t_i, i \in N_l \setminus \{r\}, x \in X\}.$$

Оптимальний розв'язок $x^0$ цієї задачі завжди є слабо ефективним, а якщо він єдиний (з точністю до еквівалентності $\sim_f$), то і ефективним. Якщо розв'язок $x^0$ ефективний, то він є єдиним (з точністю до еквівалентності $\sim_f$) розв'язком задачі $Z(f_r, X(t_i))$ при будь-якому фіксованому $r \in N_l$ і $t_i = f_i(x^0)$, $i \in N_l \setminus \{r\}$. Вибір одного з критеріїв як головного не зменшує можливість вибору оптимального розв'язку. Для визначення порогових значень $t_i$, $i \in N_l \setminus \{r\}$, можна скористатися твердженням 4, що встановлює верхні і нижні границі значень критеріїв $f_i(x)$, $i \in N_l$, на множині полірозміщень. Пропонується два підходи до розв'язання вхідної задачі $Z(F, X)$. Перший полягає в присвоєнні порогам $t_i$, $i \in N_l \setminus \{r\}$, максимально можливих значень критеріїв $f_i(x)$, $i \in N_l$, на множині полірозміщень з наступним розширенням допустимої області задачі $Z(f_r, X)$, якщо вхідна задача виявиться недопустимою, а у випадку її допустимості — знаходження ефективного або слабо ефективного розв'язку. Другий підхід допускає пошук оптимального розв'язку задачі $Z(f_r, X)$ при визначенні мінімальних значень критеріїв $f_i(x)$, $i \in N_l$, з наступним звуженням допустимої області за допомогою вибору наступних значень порогів $t_i$, $i \in N_l \setminus \{r\}$, упорядкованих за зростанням, за мінімальними значеннями критеріїв. Процедура присвоєння серії граничних величин $t_i$ обмежень і в першому і в другому підході дуже проста, оскільки з використанням твердження 4 вона зводиться після упорядкування коефіцієнтів критеріїв до обчислення скалярного добутку двох векторів, тобто до визначення значень лінійних критеріїв. При цьому, з огляду на структурні особливості множини полірозміщень, величини $t_i$ можна обчислювати більш ефективно, використовуючи перестановки елементів кожної $i$-ї, $i \in N_s$, підмножини мультимножини $A$.

Очевидно, що запропонований метод у результаті розв'язання скінченного числа підзадач вигляду $Z(f_r, X)$ приводить до ефективного розв'язку задачі $Z(F, X)$, або до встановлення її нерозв'язності.

Таким чином, у даній роботі на основі проведеного аналізу векторної комбінаторної задачі, що базується на використанні інформації про опуклу оболонку допустимої області, вивченні властивостей многогранників, вершини яких визначають підмножину заданої комбінаторної множини полірозміщень, розроблено і обгрунтовано метод розв'язання складних багатокритеріальних задач на комбінаторній множині полірозміщень. Застосування структурних властивостей комбінаторних многогранників дає можливість розробляти ефективні алгоритми розв'язування векторних оптимізаційних задач.


1. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1988. – 472 с.
2. *Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1981. – 287 с.
3. *Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергієнко Т. І.* Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною // Доп НАН України. – 2003. – № 10. – С. 80–85.
4. *Семенова Н. В., Колечкина Л. Н., Нагорная А. Н.* Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и систем. анализ. – 2008. – № 3. – С. 158–172.
5. *Semenova N. V., Kolechkina L. M., Nagirna A. M.* Vector combinatorial problems in a space of combinations with linear fractional functions of criteria // Intern. J. Inform. Theor. and Appl. – 2008. – **15**. – P. 240–245.
6. *Семенова Н. В., Колечкина Л. Н., Нагорная А. Н.* Решение и исследование векторных задач комбинаторной оптимизации на множестве полиперестановок // Пробл. управления и информатики. – 2008. – № 6. – С. 26–41.
7. *Семенова Н.* Векторные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: условия оптимальности и подход к решению // Intern. Book Series "Information science and computing", № 7. – Supplement to Intern. J. Inform. Theor. and Knowledge. – 2008. – **2**. Institute of Inform. Theor. and Appl. FOI ITHEA. – Sofia, 2008. – P. 187–195.

8. *Колечкина Л.* Многокритериальные задачи на комбинаторном множестве полиразмещений: структурные свойства решений // Ibid. – P. 180–186.
9. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.
10. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М.* Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 104 с.
11. *Ємець О. О., Колєчкіна Л. М.* Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. – Київ: Наук. думка, 2005. – 118 с.
12. *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. – Москва: Наука, 1981. – 344 с.
13. *Aardal K., Hoesel S.* Polyhedral techniques in combinatorial optimization I: Theory // Statist. Neerlandica. – 1996. – **15**. – P. 3–26.
14. *Семенова Н. В.* Условия оптимальности в векторных задачах комбинаторной оптимизации // Теорія оптим. рішень. – 2008. – № 7. – С. 153–160.
15. *Семенова Н. В., Колєчкіна Л. М., Нагірна А. М.* Розв'язання багатокритеріальних задач комбінаторної оптимізації на множині поліперестановок // Доп. НАН України. – 2009. – № 2. – С. 41–48.

*Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова*
*НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 30.01.2009*

**N. V. Semenova, L. M. Kolechkina**

## A polyhedral approach to the solution of a class of vector problems of combinatorial optimization

*Multicriterial problems of discrete optimization on a feasible combinatorial set of polyarrangements are considered. Structural properties of the feasible region and different types of efficient solutions are explored. On the basis of development of the ideas of Euclidean's combinatorial optimization and the method of main criterion, a polyhedral approach to the solution of multicriterial combinatorial problems on the set of polyarrangements is developed and grounded.*