Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2009

МЕХАНІКА

УДК 62-523.2

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

Об определении времени трогания, движения и возврата якоря электромагнитного ударного возбудителя

Наводяться формули часу рушання, руху, повернення якоря в електромагнітному збуджувачі удару. Час руху виведено за допомогою двох методів.

Электромагнитные ударные возбудители (ЭМУВ) применяются в различных технологических процессах, при испытаниях на динамическую надежность деталей и узлов машин, в том числе энергетических [1, 2]. Возбуждения ударов с помощью ЭМУВ происходят как одиночные, так и периодически следующие друг за другом. В динамике ЭМУВ важно знать время трогания, движения и возврата подвижных систем ЭМУВ, что является важным для решения задач по формированию более крутых передних фронтов возбуждения ударов, по повышению быстродействия ЭМУВ, частотного диапазона воспроизводимых ударов на основе сокращения паузы между ударами. Заметим, что в работах [3, 4] рассматриваются задачи по определению времени трогания электромагнитных реле постоянного тока, однако, на наш взгляд, здесь имеется ряд нерешенных вопросов, на которые мы обратим внимание.

Рассмотрим однотактный ЭМУВ, изображенный на рис. 1, где М — магнитопровод; Я — якорь; Пр — пружины; О — электрическая обмотка; δ_0 — воздушный зазор; U — напряжение.

В качестве задающего напряжения U, подключаемого к обмотке О, будем использовать прямоугольные импульсы — одиночные и периодически следуемые. При подаче на обмот-

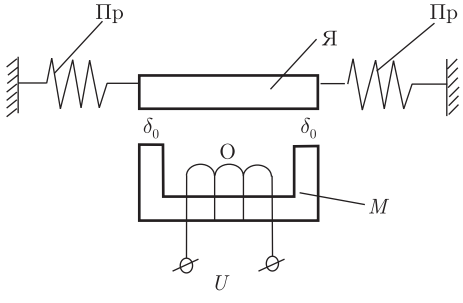

Рис. 1

ку импульса напряжения в ней возникает электрический ток $i(t)$. Уравнение электроцепи имеет вид

$$U(t) = ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}, \qquad (1)$$

где r, L — активное сопротивление и индуктивность обмотки соответственно; t — время.

Решение уравнения (1) относительно $i(t)$ следующее:

$$i(t) = \frac{U}{r}(1 - e^{-\beta t}), \qquad (2)$$

где $\beta = r/L$ — коэффициент затухания.

Ток $i(t)$ создает в магнитной системе ЭМУВ магнитный поток Φ, который определяется в соответствии с законом полного тока в виде [5]

$$\Phi = iwG. \qquad (3)$$

Здесь w — число витков обмотки О; $G = \mu_0 S/(2\delta)$ — магнитная проводимость в ЭМУВ; μ_0 — магнитная проницаемость воздуха; S — площадь поперечного сечения полюса магнитопровода у воздушного зазора δ_0; δ — динамический (изменяющийся при движении якоря) воздушный зазор.

Поток Φ, в свою очередь, создает тяговое усилие F в ЭМУВ, которое притягивает якорь к магнитопроводу. Тяговое усилие F равно [5]

$$F = \mu_0 S\left(\frac{wi}{2\delta}\right)^2$$

или, с учетом (2),

$$F = \mu_0 S\left(\frac{w}{2\delta}\frac{U}{r}\right)^2(1 - e^{-t/\tau})^2. \qquad (4)$$

Заметим, что $U/r = i_{\text{уст}}$ является установившимся током $i(t)$. А это значит, что (4) можно записать в виде

$$F = \mu_0 S\left(\frac{w}{2\delta}\right)^2 i_{\text{уст}}^2(1 - e^{-t/\tau})^2. \qquad (5)$$

Из (5) видно, что начало движения якоря определяется тяговым усилием трогания

$$F_{\text{тр}} = \mu_0 S\left(\frac{w}{2\delta}\right) i_{\text{тр}}^2 = \mu_0 S\left(\frac{w}{2\delta}\right) i_{\text{уст}}^2(1 - e^{-t_{\text{тр}}/\tau})^2, \qquad (6)$$

где $t_{\text{тр}}$ — время трогания (начала движения) якоря.

Из (6) $t_{\text{тр}}$ определяется выражением

$$t_{\text{тр}} = \tau \ln\frac{i_{\text{уст}}}{i_{\text{уст}} - i_{\text{тр}}} = \frac{L}{r}\ln\frac{i_{\text{уст}}}{i_{\text{уст}} - i_{\text{тр}}}. \qquad (7)$$

Из (7) видно, что, если $i_{\text{тр}} = 0$, то и $t_{\text{тр}} = 0$, и с увеличением $i_{\text{тр}}$ время $t_{\text{тр}}$ увеличивается, т. е. якорь запаздывает в своем движении по сравнению с началом приложения к обмотке напряжения. Более точно время трогания $t_{\text{тр}}$ ЭМУВ можно определить из уравнения движения якоря, так как в формуле (7) не видна связь $i_{\text{тр}}$ с механическими параметрами якоря, а именно, с массой (m_1), коэффициентами диссипации (b) и жесткости (c).

Заметим, что в момент трогания демпфирование отсутствует ($b(d\delta/dt) = 0$). Поэтому уравнение движения якоря будет иметь вид

$$m\frac{d^2\delta}{dt^2} = F_{\text{тр}} - c\delta. \tag{8}$$

Для определения $t_{\text{тр}}$ якоря представим (8) так:

$$md^2\delta = (F_{\text{тр}} - c\delta)dt^2. \tag{9}$$

Проинтегрируем (9) два раза таким образом:

$$m\int\limits_0^\delta d\delta \int\limits_0^\delta d\delta = (F_{\text{тр}} - c\delta)\int\limits_0^{t_{\text{тр}}} dt \int\limits_0^{t_{\text{тр}}} dt,$$

откуда получим

$$\frac{m\delta^2}{2} = (F_{\text{тр}} - c\delta)\frac{t_{\text{тр}}^2}{2}$$

и тогда время трогания якоря выразится формулой

$$t_{\text{тр}} = \delta\sqrt{\frac{m}{F_{\text{тр}} - c\delta}}. \tag{10}$$

На наш взгляд, формула (10) четко отражает физику процесса формирования $t_{\text{тр}}$, а именно: чем больше воздушный зазор (δ) и масса (m), тем труднее сдвинуться с места якорю. Далее, чем больше тяговое усилие $F_{\text{тр}}$, тем меньше время трогания $t_{\text{тр}}$. Сила жесткости увеличивает $t_{\text{тр}}$, так как она противодействующая. Все это объяснение вложено в формулу (10). Включим в (10) значение $F_{\text{тр}} = \mu_0 S(wi_{\text{тр}}/(2\delta))^2$. Получим

$$t_{\text{тр}} = 2\delta^2\left[\frac{m}{\mu_0 S(iw)^2 - 4\delta^3 c}\right]^{1/2}. \tag{11}$$

Выражение (10) также представим с учетом (3) того, что $F_{\text{тр}} = \Phi_{\text{тр}}^2/(2\mu_0 S)$, где $\Phi_{\text{тр}}$ — магнитный поток трогания в ЭМУВ. Тогда

$$t_{\text{тр}} = \delta\left(\frac{\mu_0 Sm}{\Phi_{\text{тр}}^2 - \mu_0 Sc\delta}\right)^{1/2}. \tag{12}$$

Из (12) видно, что чем больше ампер-витки (iw), тем меньше $t_{\text{тр}}$ и чем больше противодействие $c\delta$, тем больше $t_{\text{тр}}$. То же самое видно из (12): чем больше магнитный поток $\Phi_{\text{тр}}$, тем меньше $t_{\text{тр}}$. Ту же роль, что и в (10), (11), здесь играет противодействие ($c\delta$).

Перейдем к определению времени движения якоря после его трогания. В основу определения времени движения якоря положим использование кинетической энергии ЭМУВ, которая равна

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 = F\delta. \tag{13}$$

Выражение (13) выразим так:

$$\left(\sqrt{\frac{m}{2F\delta}}\right)d\delta = dt$$

и проинтегрируем это выражение следующим образом:

$$\int\limits_0^{\delta} \sqrt{\frac{m}{2F\delta}}d\delta = \int\limits_0^{t_{\text{дв}}} dt. \tag{14}$$

В (14) введем $F = \mu_0 S(iw/(2\delta))^2$. Тогда (14) имеет вид

$$\frac{2}{iw}\sqrt{\frac{m}{\mu_0 S}}\int\limits_0^{\delta_k} \delta\frac{1}{2}d\delta = \int\limits_0^{t_{\text{дв}}} dt,$$

откуда время движения якоря определяется формулой

$$t_{\text{дв}} = \frac{4\delta_k}{3iw}\sqrt{\frac{m\delta_k}{\mu_0 S}}. \tag{15}$$

Формула (15) физически оправдана. Чем больше m, δ, тем больше $t_{\text{дв}}$ и $t_{\text{дв}}$ меньше, чем больше iw и $\mu_0 S$.

После прекращения прямоугольного импульса напряжения U якорь под действием силы тяжести отходит от магнитопровода и совершает послеударные колебания. В этом случае подвижная система якоря описывается однородным дифференциальным уравнением

$$m\frac{d^2\delta}{dt^2} + b\frac{d\delta}{dt} + c\delta = 0. \tag{16}$$

При этом имеем начальное условие $\delta = \delta_k$, где δ_k — конечное значение динамического перемещения якоря во время движения.

Решение уравнения (16) следующее [7]:

$$\delta(t) - \delta_{k1}e^{-ht}\left[1 + \left(\frac{h}{\omega_1}\right)^2\right]^{1/2}\cos(\omega_1 t - \varphi_1), \tag{17}$$

где δ_{k1} — конечное перемещение якоря в конце $t_{\text{дв}}$, $h = b/(2m)$, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$, $\omega_0 = \sqrt{c/m}$, $\varphi_q = \operatorname{arctg}(x_k h/\omega_1)$.

В (17) отсутствует $d\delta_{k1}/dt$, так как считаем, что $d\delta_{k1}/dt = 0$. Как видно из (17), после окончания времени движения якоря последний отходит от магнитопровода, совершая затухающие колебания. Реальное время затухания этих колебаний равно при $t_3 = 4{,}6\tau = 4{,}6/h$, т. е. тогда, когда $\delta(t) = 0{,}01\delta_{k1}$. При необходимости осуществлять периодические следующие удары такое время t_3, являющееся временем паузы между ударами, не позволяет увеличить частоту следования ударов. Однако в работе [8] показано, что на основе оптимального управления время паузы можно значительно уменьшить и этим самым увеличить частоту следования ударов.

Мы можем предложить еще один вариант определения времени движения якоря в ЭМВ, который является более аналитически громоздким по сравнению с ранее изложенным, но точнее учитывает факторы, способствующие и препятствующие движению якоря. В этом определении $t_{\text{дв}}$ основой является дифференциальное уравнение движения якоря

$$m\frac{d^2\delta}{dt^2} + b\frac{d\delta}{dt} + c\delta = F(t) = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}(1 - e^{-\beta t})^2,$$
$$\beta = \frac{r}{L}. \tag{18}$$

Обозначим $\Phi^2/(\mu_0 S) = F_0$.

Решение (18) осуществим с помощью операционного метода Карсона [9]. В операционном виде уравнение (18) следующее:

$$\delta(p)(mp^2 + bp + c) = F_0\left(1 - \frac{2p}{p+\beta} + \frac{p}{p+2\beta}\right). \tag{19}$$

Из (19) получаем

$$\delta(p) = F_0\left[\frac{1}{mp^2+bp+c} - \frac{2p}{(mp^2+bp+c)(p+\beta)} + \frac{p}{(mp^2+bp+c)(p+2\beta)}\right]. \tag{20}$$

Уравнение (20) преобразуем к виду суммы простых дробей

$$\delta(p) = F_0\left(\frac{1}{mp^2+bp+c} - \frac{Ap+B}{mp^2+bp+c} - \frac{D}{p+\beta} + \frac{Qp+E}{mp^2+bp+c} + \frac{G}{p+2\beta}\right), \tag{21}$$

где

$$A = Dm; \qquad D = -\frac{B\beta}{c}; \qquad B = \frac{2c}{c - \beta(\beta m + b)}; \qquad Q = -Gm;$$
$$G = -\frac{2\beta E}{c}; \qquad E = \frac{c}{c - 2\beta(2m\beta + b)}.$$

Оригинал изображения (21) находим по таблицам [9] и он имеет вид

$$\begin{aligned}\delta(t) = F_0\Bigg\{&\frac{m}{c}\left[1 - e^{-\frac{b}{2m}t}\left(\cos\omega_\delta t + \frac{b}{2m\omega_\delta}\sin\omega_\delta t\right)\right] - A\frac{1}{\omega_\delta}e^{-\frac{b}{2m}t}\sin\omega_\delta t -\\ &-\frac{Bm}{c}\left[1 - e^{-\frac{b}{2m}t}\left(\cos\omega_\delta t + \frac{b}{2m\omega_\delta}\sin\omega_\delta t\right)\right] - \frac{D}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \frac{Q}{\omega_\delta}e^{-\frac{b}{2m}t}\sin\omega_\delta t +\\ &+\frac{Em}{c}\left[1 - e^{-\frac{b}{2m}t}\left(\cos\omega_\delta t + \frac{b}{2m\omega_\delta}\sin\omega_\delta t\right)\right] + \frac{G}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})\Bigg\},\end{aligned} \tag{22}$$

где $\omega_\delta = \sqrt{c/m - (b/2m)^2}$.

Время движения якоря определяется при $\delta(t) = \delta(t_{\text{дв}}) = \delta_0 - P/c$, где P — вес якоря совместно с весовой нагрузкой.

Сгруппируем однородные члены в (22). Получим

$$\delta(t) = F_0\left[\frac{m}{c}(1 - B + E) + \frac{1}{\beta}\left(\frac{G}{2} - D\right)\right] + F_0\frac{D}{\beta}e^{-\beta t} - F_0\frac{G}{2\beta}e^{-2\beta t} + \\ + F_0\frac{m}{c}(B - E - 1)e^{-\frac{b}{2m}t}\cos\omega_\delta t + F_0\frac{1}{\omega_\delta}\left[Q - A - \frac{b}{2c}(1 + B - E)\right]\sin\omega_\delta t. \qquad (23)$$

Вследствие того, что уравнение движения якоря (18) является линейным, к нему можно применить принцип суперпозиции [5] и поэтому в зависимости от числа составляющих в (23) интервал движения якоря $\delta(t) = \delta_0 - P/c$ можно также представить таким же количеством составляющих δ_l, $l = \overline{1,5}$, т.е.

$$\delta(t) = \sum_{l=1}^{5}\delta_l(t),$$

где $\delta_l(t)$, $l = \overline{1,5}$, соответствует своей составляющей в (23). Тогда при времени $t_{\text{дв}}$ каждая составляющая $\delta_l(t)$, $l = \overline{1,5}$, достигнет своего конечного значения. Из этого следует, что проще всего время движения якоря можно определить из составляющей $\delta_2(t) = F_0\dfrac{D}{\beta}e^{-\beta t}$. Так как известны F_0, D, β, то также становится известной функция $\delta_2(t)$. На основании этого время движения якоря будет при

$$\delta(t) = \delta_{2k} = \delta_2(t_{\text{дв}}) = F_0\frac{D}{\beta}e^{-\beta t_{\text{дв}}}. \qquad (24)$$

Из выражения (24) получаем, что время движения якоря определяется формулой

$$t_{\text{дв}} = \frac{1}{\beta}\ln\frac{F_0 D}{\beta\delta_{2k}}. \qquad (25)$$

Также более легко можно получить выражение времени движения якоря из третьей составляющей $\delta_3(t)$ в (23). В этом случае

$$t_{\text{дв}} = \frac{1}{2\beta}\ln\frac{F_0 G}{2\beta\delta_{3k}}. \qquad (26)$$

Получение формул для $t_{\text{дв}}$ из четвертой и пятой составляющих в (23) более громоздко, так как неизвестны значения $\cos\omega_\delta t_{\text{дв}}$ и $\sin\omega_\delta t_{\text{дв}}$. Конечно, если считать, что период $T = 2\pi/\omega_\delta$ собственных колебаний подвижной системы ЭМУВ значительно больше $t_{\text{дв}}$($T \gg t_{\text{дв}}$), то можно приближенно принять $\cos\omega_\delta t \approx 1$, $\sin\omega_\delta t \approx 0$. В этом случае из четвертой составляющей в (23) получаем

$$t_{\text{дв}} = \frac{2m}{b}\ln\frac{F_0 m(B - E - 1)}{c\delta_{4k}}. \qquad (27)$$

Заметим, что в выражениях (25)–(27) под логарифмом в числителе стоит F_0, а в знаменателе — δ_{lk}, $l = 2, 3, 4$, которое прямо пропорционально F_0 (см. (23)). Вследствие этого физического противоречия в этих выражениях не должно быть.

Таким образом, в результате данного исследования разработаны методы определения времени трогания, движения и возврата якоря электромагнитного возбудителя ударов. Также выведены формулы этого времени.

Данные зависимости являются первоначальным основанием выявления динамических характеристик ЭМУВ. Окончательные выражения этих характеристик может дать эксперимент. Но при проектировании ЭМУВ полученные аналитические зависимости уже дают возможность обосновать конструкцию ЭМУВ.

1. *Вибрации* в технике / Под ред д. т. н. Э. Э. Лавендела. – Москва: Машиностроение, 1981. – Т. 4. – 510 с.
2. *Испытательная* техника. Справочник в 2-х кн. / Под ред. В. В. Клюева. – Москва: Машиностроение, 1982. – Кн. 1. – 528 с.
3. *Ступель Ф. А.* Электромеханические реле. – Харьков: Изд. Харьков. гос. ун-та, 1956. – 355 с.
4. *Юревич Е. И.* Электромагнитные устройства автоматики. – Москва: Энергия, 1964. – 416 с.
5. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
6. *Божко А. Е., Личкатый Е. А., Мягкохлеб К. Б.* Метод повышения амплитуд вибраций электромагнитных вибровозбудителей // Пробл. машиностроения. – 2002. – **5**, № 1. – С. 44–48.
7. *Божко А. Е., Голуб Н. М.* Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.
8. *Божко А. Е., Иванова З. А., Шипилло С. В.* Электродинамическое возбуждение ударов. – Киев: Наук. думка, 1999. – 198 с.
9. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 30.05.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

On the determination of the times of start, motion, and return of the armature in an electromagnetic exciter of impacts

The formulas for the times of start, motion, and return of the armature in an electromagnetical exciter of impacts are given. The time of motion is deduced with the help of two methods.