УДК 539.3

В. В. Матус

Матриця розсіяння для хвиль згину у тонкій пластині

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Г. С. Кітом)

Метод T-матриць поширено на задачі розсіяння згинних хвиль неоднорідністю у плоскій тонкій пластині. Розглянуто випадок отвору та жорсткої наскрізної вставки неканонічної форми. З використанням принципу взаємності та закону збереження енергії встановлено симетричність та унітарність матриці розсіяння.

Метод T-матриць широко використовується для одержання числових розв'язків задач розсіяння хвиль різноманітної фізичної природи. Етапи розвитку та сферу застосувань методу висвітлено в роботах [1–3]. В даній роботі цей метод розроблено стосовно задач розсіяння згинних хвиль у тонкій безмежній пластині в рамках теорії Кірхгофа. Вважається, що розсіювачем є жорстка наскрізна вставка або отвір неканонічної форми. Раніше за допомогою інших методів досліджувались, в основному, випадки неоднорідностей кругової форми [4–6].

Згинні коливання пластини в гармонічному режимі описуються рівнянням [4]

$$\begin{aligned} &D\Delta^2 w(\mathbf{r}) - \rho h\omega^2 w(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathbf{r} \in R^2 \setminus S, \\ &w(\mathbf{r}) = w^i(\mathbf{r}) + w^s(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{1}$$

де D, ρ, h — циліндрична жорсткість, густина та товщина пластини; S — область неоднорідності; $w^i(\mathbf{r}) = w_0 \exp(ikr\cos(\theta - \theta_i))$ — згинна хвиля, що набігає на розсіювач (w_0 та θ_i — амплітуда та кут падіння хвилі); $w^s(\mathbf{r})$ — розсіяна хвиля; $\mathbf{r} = (x, y) = (r, \theta)$ — декартові та полярні координати з початком всередині неоднорідності ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$); ω та $k = \sqrt[4]{\rho h\omega^2/D}$ — кругова частота та хвильове число згинних коливань пластини.

На контурі розсіювача $\Gamma = \partial S$ задаються граничні умови

$$w(\mathbf{r}) = 0, \qquad \gamma(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathbf{r} \in \Gamma \qquad \text{(абсолютно жорстке включення)}, \tag{2}$$

$$M(\mathbf{r}) = 0, \qquad V(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathbf{r} \in \Gamma \qquad \text{(отвір)}, \tag{3}$$

де γ, M та V — кут повороту, згинний момент та узагальнена перерізальна сила.

Крім того, на безмежності виконуються умови випромінювання

$$\frac{\partial w^s}{\partial r} - ikw^s = o(r^{-1/2}), \qquad r \to \infty.$$

Використовуючи теорему взаємності робіт [7, 8], для розсіяного поля знаходимо інтегральне подання

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Gamma [V^G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')w(\mathbf{r}') - M^G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\gamma(\mathbf{r}')]d\Gamma(\mathbf{r}') - \\ &\qquad - \int\limits_\Gamma [V(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - M(\mathbf{r}')\gamma^G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]d\Gamma(\mathbf{r}') + w^i(\mathbf{r}) = \begin{cases} w(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \notin S, \\ 0, & \mathbf{r} \in S, \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

де $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = [i\pi H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) - 2K_0(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)]/(8\pi Dk^2)$ — фундаментальний розв'язок рівняння (1); $H_0^{(1)}(x)$ — функція Ганкеля першого роду нульового порядку; $K_0(x)$ — модифікована функція Бесселя другого роду нульового порядку; $V^G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $M^G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $\gamma^G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ — узагальнена перерізальна сила, згинний момент та кут повороту, що відповідають прогину $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$.

Застосувавши теореми додавання для функцій Ганкеля та Бесселя [4], фундаментальний розв'язок рівняння (1) подамо у вигляді ряду за системою циліндричних гармонік

$$
\begin{gathered}
G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi Dk^2}\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}[i\pi\overline{\Phi}_{1\sigma n}(\mathbf{r}')\Phi_{1\sigma n}(\mathbf{r}) - 2\overline{\Phi}_{2\sigma n}(\mathbf{r}')\Phi_{2\sigma n}(\mathbf{r})], \qquad |\mathbf{r}'| < |\mathbf{r}|,\\
\Phi_{\tau\sigma n}(\mathbf{r}) = \sqrt{\varepsilon_n}\Phi_{\tau n}(r)C_{\sigma n}(\theta), \qquad \overline{\Phi}_{\tau\sigma n}(\mathbf{r}) = \sqrt{\varepsilon_n}\overline{\Phi}_{\tau n}(r)C_{\sigma n}(\theta),\\
\Phi_{\tau n}(r) = \begin{cases} H_n^{(1)}(kr), & \tau = 1,\\ K_n(kr), & \tau = 2,\end{cases} \qquad \overline{\Phi}_{\tau n}(r) = \begin{cases} J_n(kr), & \tau = 1,\\ I_n(kr), & \tau = 2,\end{cases}\\
C_{\sigma n}(\theta) = \begin{cases} \cos n\theta, & \sigma = 1,\\ \sin n\theta, & \sigma = 2,\end{cases} \qquad n = \overline{0,\infty},
\end{gathered} \tag{5}
$$

де $J_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$, $I_n(x)$, $K_n(x)$ — відповідно функції Бесселя та Ганкеля першого роду, модифіковані функції Бесселя першого та другого роду n-го порядку, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ при $n \geqslant 1$.

Із співвідношень (4), (5) для розсіяного поля при $r > r_1$ (r_1 — радіус кола, описаного навколо розсіювача) маємо

$$
w^s(r,\theta) = w_0\sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{m=0}^{\infty}[\alpha_{1\sigma m}\Phi_{1\sigma m}(r,\theta) + \alpha_{2\sigma m}\Phi_{2\sigma m}(r,\theta)], \qquad r > r_1. \tag{6}
$$

Причому, для пластинки з отвором (гранична умова (3))

$$
\beta_\tau\alpha_{\tau\sigma m} = \int_\Gamma [w\overline{V}_{\tau\sigma m}(r,\theta) - \gamma\overline{M}_{\tau\sigma m}(r,\theta)]\,d\Gamma, \tag{7}
$$

а для пластинки із жорстким включенням (гранична умова (2)) —

$$
\beta_\tau\alpha_{\tau\sigma m} = \int_\Gamma [M\overline{\gamma}_{\tau\sigma m}(r,\theta) - V\overline{\Phi}_{\tau\sigma m}(r,\theta)]\,d\Gamma. \tag{8}
$$

У виразах (7), (8)

$$
\begin{gathered}
\overline{\gamma}_{\tau\sigma m} = \frac{\partial\overline{\Phi}_{\tau\sigma m}(r,\theta)}{\partial n}, \qquad \overline{M}_{\tau\sigma m} = -D\nu\Delta\overline{\Phi}_{\tau\sigma m}(r,\theta) + D(\nu-1)\mathbf{n}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\operatorname{grad}\overline{\Phi}_{\tau\sigma m}(r,\theta),\\
\overline{V}_{\tau\sigma m} = -D\Delta\overline{\gamma}_{\tau\sigma m}(r,\theta) - D(1-\nu)\frac{\partial}{\partial l}\left(\mathbf{n}\cdot\frac{\partial}{\partial l}\operatorname{grad}\overline{\Phi}_{\tau\sigma m}(r,\theta)\right),\\
\beta_\tau = 8\pi w_0 Dk^2\left(\frac{1}{i\pi}\delta_{\tau 1} - \frac{1}{2}\delta_{\tau 2}\right), \qquad \tau = 1,2, \qquad \sigma = 1,2, \qquad m = \overline{0,\infty},
\end{gathered}
$$

ν — коефіцієнт Пуассона; $\mathbf{n}$ та $\mathbf{l}$ — одиничні вектори зовнішньої нормалі та дотичної до контуру Γ; $\delta_{\tau i}$ — символ Кронекера.

Розглянемо спочатку випадок отвору у тонкій пластині. Вважаючи, що у поданнях (4), (5) $\mathbf{r} \in S$ та враховуючи ортогональність функцій $\overline{\Phi}_{\tau\sigma m}$ на колі, отримуємо

$$\begin{gathered} \frac{i}{8Dk^2}\int\limits_{\Gamma}(V_{1\sigma m}w - M_{1\sigma m}\gamma)d\Gamma = -w_0 A_{1\sigma m}, \\ \int\limits_{\Gamma}(V_{2\sigma m}w - M_{2\sigma m}\gamma)d\Gamma = 0, \qquad \sigma = 1,2, \qquad m = \overline{0,\infty}, \end{gathered} \tag{9}$$

де $A_{1\sigma m} = \sqrt{\varepsilon_m}i^m C_{\sigma m}(\theta_i)$ — коефіцієнти розкладу падаючої хвилі w^i за циліндричними гармоніками; вирази для $V_{\tau\sigma m}$ та $M_{\tau\sigma m}$ одержуються із $\overline{V}_{\tau\sigma m}$ та $\overline{M}_{\tau\sigma m}$ заміною $\overline{\Phi}_{\tau\sigma m}$ на $\Phi_{\tau\sigma m}$.

Невідомий прогин та кут повороту на контурі отвору наведемо у вигляді рядів за тригонометричною системою функцій (a — характерний розмір неоднорідності)

$$\begin{gathered} w(r,\theta) = w_0\sum_{n=0}^{\infty}a_{1\sigma n}C_{\sigma n}(\theta), \\ \gamma(r,\theta) = a^{-1}w_0\sum_{n=0}^{\infty}a_{2\sigma n}C_{\sigma n}(\theta), \qquad r,\theta \in \Gamma. \end{gathered} \tag{10}$$

Підставляючи (10) у (9), зв'язок між коефіцієнтами розкладів w^i та w, γ на Γ подамо у матричному записі

$$\begin{bmatrix} A_{1\sigma m} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Q^{11})_{\sigma m,\sigma' n} & (Q^{12})_{\sigma m,\sigma' n} \\ (Q^{21})_{\sigma m,\sigma' n} & (Q^{22})_{\sigma m,\sigma' n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1\sigma' n} \\ a_{2\sigma' n} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Зокрема, елементи матриці Q^{11} мають вигляд (подібна структура і в решти матриць Q^{ij})

$$Q^{11}_{\sigma m,\sigma' n} = -\frac{i}{8Dk^2}\int\limits_{\Gamma}V_{1\sigma m}(r,\theta)C_{\sigma' n}(\theta)\,d\Gamma.$$

Аналогічно із (7) та (10) маємо співвідношення

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1\sigma m} \\ \alpha_{2\sigma m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\overline{Q}^{11})_{\sigma m,\sigma' n} & (\overline{Q}^{12})_{\sigma m,\sigma' n} \\ (\overline{Q}^{21})_{\sigma m,\sigma' n} & (\overline{Q}^{22})_{\sigma m,\sigma' n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1\sigma' n} \\ a_{2\sigma' n} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

де елементи матриць $\overline{Q}^{ij}$ отримуються з елементів матриць Q^{ij} заміною $V_{\tau\sigma m}$, $M_{\tau\sigma m}$ на $\overline{V}_{\tau\sigma m}$, $\overline{M}_{\tau\sigma m}$, відповідно.

Із матричних рівнянь (11), (12) знаходимо T-матрицю (transition matrix), яка визначає шукані коефіцієнти розсіяного поля за відомими коефіцієнтами падаючого поля

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1\sigma m} \\ \alpha_{2\sigma m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T^{11})_{\sigma m,\sigma' n} & (T^{12})_{\sigma m,\sigma' n} \\ (T^{21})_{\sigma m,\sigma' n} & (T^{22})_{\sigma m,\sigma' n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1\sigma' n} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}^{11} & \overline{Q}^{12} \\ \overline{Q}^{21} & \overline{Q}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{11} & Q^{12} \\ Q^{21} & Q^{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

або

$$T = \overline{Q}Q^{-1}. \tag{13}$$

Розсіяне хвильове поле в дальній зоні визначається співвідношенням [6]

$$w^s(r,\theta) = w_0\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\pi/4)}f(\theta,\theta_i) + o\left(\frac{1}{\sqrt{kr}}\right), \qquad kr \to \infty. \tag{14}$$

Амплітуда розсіяння $f(\theta,\theta_i)$ отримується із (6) з використанням асимптотичних розкладів функцій Ганкеля та Бесселя

$$f(\theta,\theta_i) = \sum_{\sigma=1}^{2}\sum_{m=0}^{\infty} A^*_{1\sigma m}(\theta)\alpha_{1\sigma m}(\theta_i), \tag{15}$$

або у матричному вигляді

$$f(\theta,\theta_i) = b^{*t}(\theta)Tb(\theta_i), \qquad b(\theta) = \begin{bmatrix} A_{1\sigma m}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

індексами $*$ та t позначено операцію комплексного спряження та операцію транспортування матриці.

Доведемо симетричність і унітарність матриці розсіяння $S = I + 2T^{11}$ (I — одинична матриця). Помінявши в (15) місцями напрямки спостереження і падіння хвиль та врахувавши, що $A_{1\sigma m}(\pi+\theta) = A^*_{1\sigma m}(\theta)$, отримаємо $f(\pi+\theta_i, \pi+\theta) = b^{*t}(\theta)T^tb(\theta_i)$. Із цієї рівності та із співвідношення взаємності $f(\theta,\theta_i) = f(\pi+\theta_i,\pi+\theta)$ випливає симетричність T-матриці $T = T^t$, а, отже, і матриці розсіяння $S = S^t$.

Згідно з оптичною теоремою, поперечний переріз розсіяння σ^{sc} визначається співвідношенням [6]

$$\sigma^{sc} = \frac{2}{\pi k}\int_0^{2\pi} |f(\theta,\theta_i)|^2 d\theta = -\frac{4}{k}\operatorname{Re} f(\theta_i,\theta_i),$$

або у матричному записі

$$A^t(\theta_i)(T^{11})^t(T^{11})^*A^*(\theta_i) = -A^t(\theta_i)\operatorname{Re}(T^{11})A^*(\theta_i),$$

де $A(\theta_i) = [A_{1\sigma m}(\theta_i)]$ — матриця-стовпець. Отже, для T-матриці маємо $(T^{11})(T^{11})^* = -\operatorname{Re}(T^{11})$. Враховуючи цю властивість T-матриці та її симетричність, отримаємо

$$S^{*t}S = I, \tag{17}$$

тобто матриця розсіяння є унітарною.

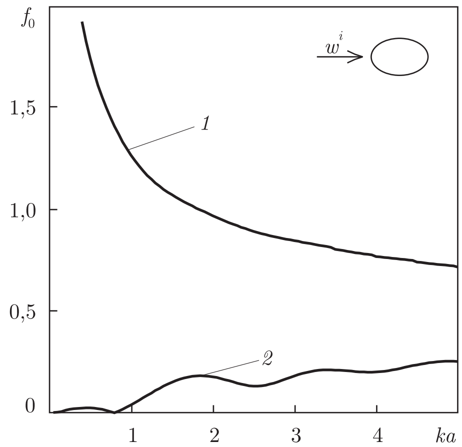

Рис. 1

У випадку задачі розсіяння згинних хвиль жорстким включення залишаються справедливими усі співвідношення (11)–(17) з тією відміною, що елементи матриць Q та $\overline{Q}$ матимуть інший вигляд.

Доведені властивості симетричності та унітарності S-матриці використовуються для оцінки точності числових розрахунків та є необхідними умовами коректності одержаних розв'язків.

Для прикладу отримаємо частотні залежності модулів амплітуди розсіяння $f_0 = |f(\pi, 0)|$ (рис. 1) у випадку еліптичного жорсткого включення (крива *1*) та еліптичного отвору (крива *2*). Форма неоднорідності визначається співвідношенням $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a/b = 2$. Коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки $\nu = 0{,}26$. Матриця переходу T знаходилась із (13). При обчисленнях обернена матриця Q^{-1} визначалася шляхом редукції методом Гаусса–Жордана. Порядок редукції N залежить від форми розсіювача і його хвильових розмірів. Числовий експеримент показав, що для наведених на рис. 1 частотних залежностей відносна похибка до 1% забезпечується при $N = 15$. У випадку отвору і жорсткого включення кругових форм ($a/b = 1$) графічні залежності амплітуди розсіяння, отримані за допомогою описаного алгоритму, повністю збігаються з відповідними результатами, одержаними в [6] методом розділення змінних.

Таким чином, на основі наведених аналітичних викладок та числових ілюстрацій можна зробити висновок про ефективність використання методу T-матриць для розв'язання задач розсіяння згинних хвиль на неоднорідностях у тонких пластинах, напружено-деформований стан яких описується в рамках теорії Кірхгофа. Властивості симетрії та унітарності матриці розсіяння є необхідними умовами достовірності розв'язку задачі розсіяння та можуть використовуватись для перевірки точності числових розрахунків.

1. *Waterman P. C.* Matrix theory of elastic wave scattering // J. Acoust. Soc. Am. – 1976. – **60**, No 3. – P. 567–580.
2. *Martin P. A.* On connection between boundary integral equations and T-matrix methods // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2003. – **27**. – P. 771–777.
3. *Mishchenko M. I., Videen G., Babenko V. A. et al.* Comprehensive T-matrix reference database: A 2004. – 06 update // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. – 2007. – **106**. – P. 304–324.
4. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 307 с.

5. *Fromme P., Sayir M. B.* Measurement of the scattering of a Lamb wave by a through hole in a plate // J. Acoust. Soc. Am. – 2002. – **111**, No 3. – P. 1165–1170.
6. *Norris A. N., Vemula C.* Scattering of flexural waves on thin plates // J. Sound and Vibration. – 1995. – **181**, No 1. – P. 115–125.
7. *Белинский Б. П., Коузов Д. П.* О формулах типа формул Грина для изгибно колеблющейся пластины // Акуст. журн. – 1981. – **27**, № 5. – С. 710–718.
8. *Зозуля В. В., Лукин А. Н.* О расчете пластин методом граничных интегральных уравнений // Доп. НАН України. – 1996. – № 4. – С. 39–45.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 22.08.2008

V. V. Matus

Scattering matrix for flexural waves in a thin plate

The T-matrix method has been adapted to the problems of flexural waves scattering by regions of inhomogeneity in a flat thin plate. The cases of a hole and a rigid heterogeneity of noncanonical form are considered. Using the principle of reciprocity and the conservation of energy, the scattering matrix is shown to be symmetric and unitary.