УДК 539.3

О. Я. Мічуда

Про один підхід до побудови математичної моделі динамічних процесів в пружних системах з урахуванням релаксаційних явищ

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Я. Й. Бураком)

Запропоновано підхід та методику побудови математичної моделі динамічних механічних процесів в деформівних пружних системах, яка описує у взаємозв'язку поступальну і обертову форми локального руху та, відповідно, локальну зміну об'єму та форми фізично малих підсистем. Сконкретизовано фізичні та кінематичні співвідношення моделі. В межах сформульованої моделі встановлено умови переходу інерційної пружної системи в стаціонарний динамічний стан.

Проблема оптимального проектування та розробки технології виготовлення елементів конструкцій та приладів, які працюють в умовах динамічного зовнішнього навантаження, тісно пов'язана з побудовою нових та вдосконаленням існуючих математичних моделей механіки деформівного твердого тіла з метою більш повного врахування інерційних параметрів характерних форм локального руху і, зокрема, їх взаємодії. Стан та перспективи розвитку досліджень в цій актуальній галузі механіки деформівного твердого тіла відображені, зокрема, в роботах [1–5].

У роботах [6, 7] вперше введено тензорні характеристики інерційності — симетричний тензор густини та тензор хімічного потенціалу, які є основою розробленої дифузійної теорії непружного деформування металічних тіл. Нижче в розвиток такого підходу запропоновано побудову математичної моделі опису динамічних процесів в пружних системах, яка враховує дисипативний характер взаємозв'язку відповідних форм локальних поступального, обертового та деформаційного рухів. На цій основі сформульовано основне енергетичне співвідношення для масоізольованої пружної системи, яка перебуває під дією динамічного силового навантаження. Встановлено відповідні фізичні та кінематичні рівняння, які враховують дисипативний характер динамічних процесів кожної із форм локального руху.

1. Розглянемо масоізольовану динамічну пружну систему K_*, яка у відліковому однорідному стані ($t \leqslant t_0$, t — час) є ненавантаженою та займає область $X_0^* \bigcup \partial X_0^*$ евклідового простору. Термодинамічний стан системи у відліковому стані є однорідним і характеризується температурою $T_{(0)}$ та густиною ентропії $S_{(0)}$, хімічним потенціалом $\mu_{(0)}$ та густиною маси $\rho_{(0)}$.

Протягом часу $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ система K_* перебуває під дією динамічного силового навантаження, яке зумовлює інерційні термомеханічні процеси.

Ідентифікацію довільної фізично малої підсистеми $\delta K \subset K_*$ і центра маси $k \in K_*$ цієї підсистеми реалізуємо за допомогою радіуса-вектора $\vec{r}_0$ місця матеріальної точки $k \in \delta K$ у відліковій (рівноважній) конфігурації, а розташування цієї точки в довільний інший момент часу t ($t_0 < t \leqslant t_2$) за допомогою радіуса-вектора $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}$, де $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}_0, t)$ — вектор переміщення.

В основу потенціального опису динамічних процесів за ізотермічних умов ($T \approx T_{(0)} = \mathrm{const}$) приймаємо балансове енергетичне співвідношення [8]

$$d\varepsilon(K_*, t) \equiv \int\limits_{X_0^*} dH(\vec{r}_0, t) dV_0 = \int\limits_{X_0^*} [\vec{v} \cdot d\vec{p} + (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v}) \cdot\cdot (d\widehat{P})^T] dV_0. \tag{1}$$

Тут $H = H(\vec{r}_0, t)$ — густина енергії фізично малої підсистеми $\delta K \subset K_*$, яка є нормованою за об'ємом δV_0 цієї підсистеми у відліковому природному стані; $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}_0, t)$ — швидкість поступального руху; $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v}$ — швидкісна тензорна характеристика процесу деформування; $\vec{p} = \vec{p}(\vec{r}_0, t) \equiv \int\limits_{t_0}^{t} (\vec{\nabla}_0 \cdot d\widehat{P}/dt + \vec{f}^{+}) d\tilde{t}$ — вектор імпульсу поступального руху; $\widehat{P} = \widehat{P}(\vec{r}_0, t)$ — тензор імпульсу деформаційної форми руху; $\vec{f}^{+} = \vec{f}^{+}(\vec{r}_0, t)$ — вектор об'ємних зовнішніх сил; $\otimes$ — оператор діадного добутку; дві крапки вказують на операцію скалярного добутку; T — операція транспонування.

Енергія $\varepsilon(K_*, t)$ є адитивною мірою динамічного стану системи K_*. Тому виконується таке локальне балансове енергетичне співвідношення для кожної фізично малої підсистеми $\delta K_* \subset K_*$:

$$dH = \vec{v} \cdot d\vec{p} + (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v}) \cdot\cdot d(\widehat{P})^T. \tag{2}$$

Тут адитивні параметри $\vec{p}$ і $\widehat{P}$ є нормованими за геометричними характеристиками фізично малих підсистем в початковому однорідному стані. Тому маємо також відповідну до (2) білінійну форму інтенсивних та спряжених до них екстенсивних параметрів

$$H = \frac{1}{2}[\vec{v} \cdot \vec{p} + (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v}) \cdot\cdot (\widehat{P})^T]. \tag{3}$$

Одночасно виконуються фізичні співвідношення

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \equiv \vec{v}(\vec{p}, \widehat{P}), \\ \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v} &= \frac{\partial H}{\partial \widehat{P}} \equiv (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v})(\vec{p}, \widehat{P}). \end{aligned} \tag{4}$$

2. Для ізотропних динамічних систем пружний потенціал $H = H(\vec{p}, \widehat{P})$ є функцією скалярних інваріантів параметрів локального динамічного стану $(\vec{p}, \widehat{P})$. Обмежимося надалі скалярними інваріантами до другого порядку включно.

За незалежні інваріанти першого порядку приймаємо такі:

$$I_1^{(1)} = \vec{I} \cdot \vec{p}, \qquad I_2^{(1)} = \widehat{I} \cdot\cdot \widehat{P}, \tag{5}$$

де $\vec{I} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ — одиничний вектор; $\widehat{I} = \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ — одиничний тензор другої валентності.

Власними скалярними інваріантами другого порядку для вектора $\vec{p}$ є такі:

$$I_{11}^{(2)} = \widehat{I} \cdot\cdot (\vec{p} \otimes \vec{p}), \qquad I_{12}^{(2)} = (\vec{p} \cdot \widehat{\epsilon}) \cdot\cdot (\widehat{\epsilon} \cdot \vec{p}). \tag{6}$$

Тут $\widehat{\epsilon} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$ — антисиметричний одиничний тензор Леві-Чивіта.

Власними скалярними інваріантами другого порядку для характерних локальних форм деформаційного руху є такі:

$$I_{21}^{(2)} = (\vec{I} \cdot \widehat{P}) \cdot (\widehat{P} \cdot \vec{I}), \qquad I_{22}^{(2)} = (\widehat{P}^s)^d \cdot\cdot (\widehat{P}^s)^d, \qquad I_{23}^{(2)} = (\widehat{P}^a) \cdot\cdot (\widehat{P}^a)^T. \tag{7}$$

Подані тут власні скалярні інваріанти тензора імпульсу $\widehat{P}$ є відповідальними за зміну об'єму, форми і повороту фізично малих підсистем.

До власних скалярних інваріантів необхідно долучити інваріанти, які характеризують енергію взаємовпливу поступальної та обертової форм руху, а також, відповідно, енергію взаємовпливу процесів зміни об'єму та форми фізично малих підсистем.

За такі інваріанти приймаємо такі:

$$I_2^{(12)} = (\widehat{P}^a \cdot\cdot \widehat{\epsilon}) \cdot \vec{p}, \qquad I_2^{(34)} = (\widehat{P}_s^d) \cdot\cdot (\widehat{\epsilon} \cdot \vec{I})P. \tag{8}$$

Наведені результати дозволяють сформулювати таку систему фізичних співвідношень:

$$\begin{aligned} &\vec{v} = \frac{1}{\rho}\vec{p} - \frac{\beta_*}{\rho_l}(\widehat{P}^a \cdot\cdot \widehat{\epsilon}),\\ &(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v})^a = \frac{1}{2\eta_1^* \rho_l}\widehat{P}^a + \frac{\beta_*}{\rho}\vec{p} \cdot \widehat{\epsilon}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{v} = \frac{1}{3\eta_0 \rho_l}P - \frac{\gamma_*}{\rho}[\widehat{P}^s \cdot\cdot (\widehat{\epsilon} \cdot \vec{I})],\\ &[(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{v})^s]^d = \frac{1}{2\eta_1 \rho_l}(\widehat{P}^s)^d - \frac{\gamma_*}{\rho}(\vec{I} \cdot \widehat{\epsilon})P. \end{aligned} \tag{10}$$

Тут β_* і γ_* є параметрами взаємовпливу поступальної і обертової форм руху та, відповідно, зміни об'єму і форми фізично малих підсистем.

Надалі поставимо у відповідність рівнянням (9) і (10) два еквівалентні векторні та скалярні рівняння:

$$\begin{aligned} &\vec{v} = \frac{1}{\rho}\vec{p} + \frac{\beta_*}{\rho_l}(\widehat{P}^a \cdot\cdot \widehat{\epsilon}),\\ &\vec{\nabla}_0 \times \vec{v} = \frac{1}{4\eta_1^* \rho_l}\widehat{P}^a \cdot\cdot \widehat{\epsilon} + \frac{\beta_*}{2\rho}\vec{p} \cdot (\widehat{\epsilon} \cdot\cdot \widehat{\epsilon}); \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{v} = \frac{1}{3\eta_0 \rho_l}P - \frac{\gamma_*}{\rho}(\widehat{P}^s \cdot\cdot \widehat{\epsilon}) \cdot \vec{I},\\ &(\vec{\nabla}_0 \times \vec{v}) \cdot \vec{I} = \frac{1}{4\eta_1 \rho_l}\widehat{P}^s \cdot\cdot (\widehat{\epsilon} \cdot \vec{I}) - \frac{\gamma_*}{2\rho}(\vec{I} \cdot \widehat{\epsilon}) \cdot\cdot (\widehat{\epsilon} \cdot \vec{I})P. \end{aligned} \tag{12}$$

Одержані фізичні співвідношення (11), (12), які враховують дисипативний характер динамічних процесів, дозволяють встановити необхідні умови переходу динамічної системи в стаціонарний стан та проаналізувати умови стійкості цього стану.

3. Сформулюємо кінематичні співвідношення для характерних форм інерційного руху динамічних пружних систем:

$$\begin{aligned} &\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{\beta_*}{\rho_l}(\widehat{P}^a \cdot\cdot \widehat{\epsilon}),\\ &\vec{\nabla}_0 \times \vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) + \frac{\beta_*}{\rho}\vec{p} \cdot (\widehat{\epsilon} \cdot\cdot \widehat{\epsilon}); \end{aligned} \tag{13}$$

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) - \frac{\gamma_*}{\rho}(\widehat{P}^s \cdot\cdot \widehat{\in}) \cdot \vec{I},$$
$$(\vec{\nabla}_0 \times \vec{v}) \cdot \vec{I} = \frac{d}{dt}[(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) \cdot \vec{I}] - \frac{\gamma_*}{\rho}(\vec{I} \cdot \widehat{\in}) \cdot\cdot (\widehat{\in} \cdot \vec{I})P. \tag{14}$$

Шляхом поєднання як фізичних (11), (12), так і поданих тут кінематичних (13), (14) співвідношень, одержуємо таку систему динамічних рівнянь моделі деформівного пружного тіла:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{1}{\rho}\vec{p},$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) = \frac{1}{4\eta_1^* \rho_l}\widehat{P}^a \cdot\cdot \widehat{\in}; \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) = \frac{1}{3\eta_0 \rho_l}P,$$
$$\frac{d}{dt}[(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) \cdot \vec{I}] = \frac{1}{4\eta_1 \rho_l}\widehat{P}^s \cdot\cdot (\widehat{\in} \cdot \vec{I}). \tag{16}$$

4. Для встановлення ключових рівнянь моделі продиференціюємо за часом систему динамічних рівнянь (15) та (16). При цьому враховуємо, що

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma}_* + \vec{f}^+, \qquad \frac{d\widehat{P}}{dt} = \widehat{\sigma}_*. \tag{17}$$

Тут $\widehat{\sigma}_* = \widehat{\sigma}_*(\vec{r}_0, t)$ — динамічний тензор напружень, який для ізотропних пружних систем подається так:

$$\widehat{\sigma}_* = K_* e\widehat{I} + 2G_*\left(e - \frac{1}{3}e\widehat{I}\right) + 2G'_*\widehat{\varphi}, \tag{18}$$

де K_*, G_*, G'_* — динамічні модулі пружності.

В результаті одержуємо систему ключових рівнянь в переміщеннях для опису динамічних процесів

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = C_{*1}^2\vec{\nabla}_0(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) - C_{*2}^2\vec{\nabla}_0 \times (\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) + \frac{\vec{f}^+}{\rho},$$
$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) = \frac{G'_*}{\rho_l \eta_1^*}(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}); \tag{19}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) = \frac{K_*}{3\rho_l \eta_0}(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}),$$
$$\frac{d^2}{dt^2}[(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) \cdot \vec{I}] = \frac{G_*}{\rho_l \eta_1}(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) \cdot \vec{I}. \tag{20}$$

До системи динамічних рівнянь (19) та (20) необхідно долучити відповідні початкові та граничні умови.

Для аналізу хвильових параметрів руху вихідними є як кінематичні (13), (14), так і фізичні співвідношення (18).

На цій основі можна сконкретизувати відповідні моделі кінематичні рівняння для характерних форм руху:

$$
\begin{aligned}
&\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt} - 4G'_* \frac{\beta_*}{\rho_l} \int\limits_{t_0}^{t} (\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) d\widetilde{t},\\
&\vec{\nabla}_0 \times \vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) - \frac{\beta_*}{\rho} \int\limits_{t_0}^{t} (\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma}_* + \vec{f}^{+}) d\widetilde{t};
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) - 4\frac{\gamma_*}{\rho} G_* \int\limits_{t_0}^{t} (\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) \cdot \vec{I} d\widetilde{t},\\
&(\vec{\nabla}_0 \times \vec{v}) \cdot \vec{I} = \frac{d}{dt}[(\vec{\nabla}_0 \times \vec{u}) \cdot \vec{I}] - \frac{\gamma_*}{\rho} K_* \int\limits_{t_0}^{t} (\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}) t\widetilde{t}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Таким чином, одержані результати є вихідними для постановки параметрично нелінійних початково-граничних задач динамічної теорії пружності з урахуванням взаємодії характерних форм локального руху, а саме, поступального і обертового, та зміни об'єму і форми фізично малих підсистем. Вони є розвитком класичних робіт Я. С. Підстригача [6, 7], в яких вперше введено тензорні характеристики інерційності — тензор густини та тензор хімічного потенціалу.

Робота виконана за часткової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень МОН України (Ф25/95 — 2008, ДР N 0108U006646).

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. *Селезов И. Т.* Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 204 с.
3. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. – Москва: ВИНИТИ, 1973. – 272 с.
4. *Тимошенко С. П.* Статические и динамические проблемы теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1975. – 564 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – Москва: Мир, 1977. – 622 с.
6. *Подстригач Я. С.* Диффузионная теория неупругости металлов // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1965. – № 2. – С. 67–72.
7. *Підстригач Я. С.* Диференціальні рівняння дифузійної теорії деформації твердого тіла // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1963. – № 31. – С. 336–340.
8. *Мічуда О. Я.* Про енергетичний підхід до формування фізичних співвідношень механіки інерційних пружних систем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 74–78.

Центр математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів
Інститут прикладної математики
та фундаментальних наук Національного
університету "Львівська політехніка"

Надійшло до редакції 07.10.2008

O. Ya. Michuda

On one approach to constructing a mathematical model of dynamical processes in elastic systems allowing for relaxation phenomena

An approach and a methodology are proposed for constructing a mathematical model of dynamical mechanical processes in deformable elastic systems describing the coupled translation and rotational forms of local motion and the corresponding local change of the volume and form of physically small subsystems. Physical and kinematic model relations are constructed. Within the frame of the formulated model, the conditions of transition of the inertial elastic system into a stationary dynamical state are established.