Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 517.987

О. С. Бичков

Про узгоджене продовження мір можливості та необхідності

(Представлено членом-кореспондентом НАН України $\boxed{\text{Ю. І. Самойленком}}$)

Розглянуто питання продовження мір можливості та необхідності на булеан. Доведено теореми, які задають умови їх узгодженого продовження. Таким чином, побудовано основи коректного використання теорії можливостей для розв'язання теоретичних та прикладних задач.

У роботах [1–4] для моделювання невизначеностей пропонується застосовувати теорію можливостей. Основи цієї теорії закладено в [5, 6]. У цих працях введено поняття мір можливості, необхідності та основні аксіоми побудови простору можливостей. Для більш повного опису невизначених подій в [2, 3] доведено теорему про σ-адитивне продовження міри з алгебри на булеан із збереженням властивостей міри. Але, як було показано в [2], лише міри можливостей недостатньо для адекватного опису природних невизначеностей. Тому в [2] запропоновано застосовувати PN-простір з двома мірами.

У цій роботі узагальнено результати попередніх досліджень з побудови простору можливостей, доведено існування κ-адитивного продовження міри можливостей на булеан та побудовано узгоджений простір можливостей.

Основний результат. Нехай X — непорожня множина, $\mathbf{A}$ — клас підмножин X, який містить $\varnothing$, X. Нехай κ позначає кардинальне число і $\kappa \geqslant \aleph_0$.

Означення 1. κ-адитивна міра можливості на $\mathbf{A}$ визначається як функція $P\colon \mathbf{A} \to L$, що задовольняє умову, якщо $\{A_t \mid t \in T\}$ — сім'я множин з $\mathbf{A}$, $|T| \leqslant \kappa$, $\bigcup\limits_{t\in T} A_t \in \mathbf{A}$, то $P\Bigl(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\Bigr) = \sup\limits_{t\in T} P(A_t)$.

Означення 2. κ-зовнішня міра можливості, побудована за κ-адитивною мірою можливості P на $\mathbf{A}$, визначається як функція $P^*\colon 2^X \to L$, що задовольняє умову

$$\forall B \in 2^X\colon P^*(B) = \inf_{\{E_t | t\in T\}} \sup_{t\in T} P(E_t),$$

де інфімум береться за системами $\{E_t \mid t \in T\}$ підмножин $\mathbf{A}$, для яких $|T| \leqslant \kappa$ і $\bigcup\limits_{t\in T} A_t \supseteq B$.

Означення 3. κ-мультиплікативна міра необхідності на $\mathbf{A}$ визначається як функція $N\colon \mathbf{A} \to L$, що задовольняє умову, якщо $\{A_t \mid t \in T\}$ — сім'я множин з $\mathbf{A}$, $|T| \leqslant \kappa$, $\bigcap\limits_{t\in T} A_t \in \mathbf{A}$, то $N\left(\bigcap\limits_{t\in T} A_t\right) = \inf\limits_{t\in T} N(A_t)$.

Означення 4. κ-внутрішня міра необхідності, побудована за κ-мультиплікативною мірою необхідності N на $\mathbf{A}$, визначається як функція $N_*\colon 2^X \to L$, що задовольняє умову $\forall B \in 2^X\colon N_*(B) = \sup\limits_{\{E_t|t\in T\}} \inf\limits_{t\in T} N(E_t)$, де супремум береться за системами $\{E_t \mid t \in T\}$ підмножин $\mathbf{A}$, для яких $|T| \leqslant \kappa$ і $\bigcap\limits_{t\in T} A_t \subseteq B$.

Означення 5. κ-узагальнене заперечення на $\mathbf{A}$ визначається як функція $\theta\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, що задовольняє умови:

1) якщо $\{A_t \mid t \in T\}$ — сім'я множин з $\mathbf{A}$, $|T| \leqslant \kappa$, $\bigcup\limits_{t\in T} A_t \in \mathbf{A}$, то $\bigcap\limits_{t\in T} \theta(A_t) \in \mathbf{A}$ і виконується рівність $\theta\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right) = \bigcap\limits_{t\in T} \theta(A_t)$;

2) $\forall A \in \mathbf{A}\colon \theta(\theta(A)) = A$.

Означення 6. Міра можливості P називається нормованою, якщо $P(X) = 1$, $P(\varnothing) = 0$. Міра необхідності N називається нормованою, якщо $N(X) = 1$, $N(\varnothing) = 0$.

Надалі усі міри можливості та усі міри необхідності будуть вважатися нормованими.

Означення 7. P-моделлю теорії можливостей назвемо трійку (X, A, P), де P є κ-адитивною мірою можливості на $\mathbf{A}$, для деякого $\kappa \geqslant \aleph_0$.

Означення 8. PN-моделлю теорії можливостей назвемо четвірку (X, A, P, N), де P є κ-адитивною мірою можливості на $\mathbf{A}$, N є κ-мультиплікативною мірою необхідності на $\mathbf{A}$, для деякого $\kappa \geqslant \aleph_0$.

Означення 9. PN-модель називається узгодженою, якщо $\forall\, A \in \mathbf{A}$ $N(A) \leqslant P(A)$ і, крім того, існують узагальнене заперечення θ та неперервна спадна бієкція $\theta_L^N\colon [0,1] \to [0,1]$ такі, що $\forall A \in A\colon P(\theta(A)) = \theta_L^N(N(A))$.

Узгоджена PN-модель надає кожній події значення можливості і необхідності, причому ці значення є пов'язаними за допомогою узагальненого заперечення. Заперечення не обов'язково є доповненням. P-модель надає формалізацію лише поняттю можливості і може розглядатися як спрощення PN-моделі.

Властивості $\boldsymbol{\kappa}$-адитивних мір можливості і необхідності. Далі позначатимемо $\mathbf{A}$ клас підмножин X, замкнений відносно скінченних об'єднань та перетинів, що містить $\varnothing$ і X.

Введемо позначення

$$\mathrm{O}_A = \left\{\{E_t\}\colon E_t \in \mathbf{A},\ t \in T,\ A \subseteq \bigcup_{t\in T} E_t\right\},$$

$$\mathrm{O}_B = \left\{\{E_t\}\colon E_t \in \mathbf{B},\ t \in T,\ B \subseteq \bigcup_{t\in T} E_t\right\}.$$

Лема 1. *Зовнішня міра можливості $P^*(\cdot)$-монотонна, тобто для $\forall A, B \subseteq X$ таких, що $A \subseteq B$ матимемо $P^*(A) \leqslant P^*(B)$.*

Лема 2. *Якщо P — κ-міра можливості на $\mathbf{A}$, P^* — κ-зовнішня міра можливості, побудована за P, то для довільної множини $A \in \mathbf{A}$ виконується $P^*(A) = P(A)$.*

Теорема 1. *Нехай P — κ-адитивна міра можливості на* $\mathbf{A}$, *P^* — κ-зовнішня міра можливості, побудована за мірою можливості P. Тоді P^* — κ-адитивна міра можливості на булеані X, яка є продовженням міри P.*

Доведення. P^* є продовженням P за лемою 2. Покажемо κ-адитивність P^* на булеані X, тобто покажемо виконання рівності

$$P^*\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) = \sup_{t\in T} P^*(A_t) \quad \text{для} \quad |T| \leqslant \kappa, \qquad \forall\, t\in T\colon A_t \subseteq X.$$

Спочатку доведемо виконання нерівності

$$P^*\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) \leqslant \sup_{t\in T} P^*(A_t).$$

Для множини $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$ маємо

$$P^*\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) = \inf_{\{E_{t\in T}\}} \sup_{t\in T} P(A_t).$$

Відповідно, для кожної із множин A_t виконується

$$P^*(A_t) = \inf_{\{E_{tp}\}\in O_{A_t}} \sup_{p\in T}(E_{tp}). \tag{1}$$

Сім'я множин $\{E_{jk}\}$ є одним із зовнішніх покриттів множини $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$, причому її потужність не перевищує $\kappa^2 = \kappa$. Оскільки нижня грань множини не більша за будь-який його член, то виконується така нерівність:

$$P^*\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) = \inf_{\{E_{t\in T}\}} \sup_{t\in T} P(A_t) \leqslant \sup_{\substack{t\in T\\ p\in T}} P(E_{tp}) = \sup_{t\in T}\sup_{p\in T} P(E_{tp}). \tag{2}$$

З (1) випливає, що для кожного $t\in T$ можна підібрати таке зовнішнє покриття $\{E_{tp}\}_{p\in T}$, що $P^*(A_t) \geqslant \sup\limits_{p\in T} P(E_{tp}) - \varepsilon$. Підставивши цей вираз у (2), одержимо, що $P^*\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right) \leqslant$ $\leqslant \sup\limits_{t\in T} P^*(A_t) + \varepsilon$. Оскільки ε може бути як завгодно малим додатним числом, маємо

$$P^*\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) \leqslant \sup_{t\in T} P^*(A_t).$$

Доведемо тепер нерівність

$$P^*\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right) \geqslant \sup_{t\in T} P^*(A_t). \tag{3}$$

З монотонності κ-зовнішньої можливості і включення $\forall s \in T \ \bigcup\limits_{t\in T} A_t \supseteq A_s$ випливає, що $P^*\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right) \geqslant P^*(A_s)$, звідки, переходячи до супремума, отримуємо нерівність (3).

Таким чином, $P^*\left(\bigcup\limits_{t\in T} A_t\right) = \sup\limits_{t\in T} P^*(A_t)$. Отже, $P^*(\cdot)$, за означенням, міра можливості, що і доводить теорему.

Наслідок. *Нехай P — κ-адитивна міра можливості на $\mathbf{A}$; $\mathbf{B}$ — клас підмножин X такий, що $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, P^* — κ-зовнішня міра можливості, побудована за мірою можливості P. Тоді $P^*|_{\mathbf{B}}$ — κ-адитивна міра можливості на $\mathbf{B}$, яка є продовженням міри P.*

Далі в тексті ця міра називатиметься стандартним κ-продовженням P з $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$.

Введемо такі позначення

$$I_A = \left\{\{E_t\}\colon E_t \in \mathbf{A},\ t \in T,\ A \supseteq \bigcup_{t\in T} E_t\right\},$$

$$I_B = \left\{\{E_t\}\colon E_t \in \mathbf{B},\ t \in T,\ B \supseteq \bigcup_{t\in T} E_t\right\}.$$

Теорема 2. *Нехай N — κ-мультиплікативна міра необхідності на $\mathbf{A}$, N_* — κ-внутрішня міра необхідності, побудована за N. Тоді N_* — κ-мультиплікативна міра необхідності на булеані X, яка є продовженням N.*

Покажемо, що для довільної множини $A \in \mathbf{A}$ внутрішня міра необхідності дорівнює мірі необхідності цієї множини, тобто $N_*(A) = N(A)$.

Виберемо сім'ю $\{E_t\}_{t\in T}$, $E_t \in \mathbf{A}$ таким чином, що $T = \{1\}$, $E_1 = A$. Отримаємо, що $A = \bigcap\limits_{t\in T} E_t$ і, відповідно, $\sup\limits_{\{E_t\}\in I_A} \inf\limits_{t\in T} N(E_t) \geqslant N(\mathrm{A})$, тобто $N_*(A) \geqslant N(\mathrm{A})$.

За означенням точної верхньої грані для $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\{E_t\}_{t\in T}$, $E_t \in \mathbf{A}$ така, що

$$\inf_{t\in T} N(E_t) > N_*(A) - \varepsilon.$$

Оскільки $A = A\bigcup\left(\bigcap\limits_{t\in T} E_t\right) = \bigcap\limits_{t\in T}\left(A\bigcup E_t\right)$, то

$$N(A) = N\left(\bigcap_{t\in T}\left(A\bigcup E_t\right)\right) = \mathop{\otimes}_{t\in T} N\Big(A\bigcup E_5\Big) = \inf_{t\in T} N\Big(A\bigcup E_t\Big) \geqslant \inf_{t\in T} N(E_t)$$

для $A \in \mathbf{A}$. Звідси випливає, що $N(A) > N_*(A) - \varepsilon$. Але при $\varepsilon \to 0$ матимемо знак нестрогої нерівності, тобто $N(A) \geqslant N_*(A)$. Отже, $N(A) = N_*(A)$.

Покажемо κ-мультиплікативність N_* на булеані X, тобто

$$N_*\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) = \inf_{t\in T} N_*(A_t) \quad \text{для} \quad |T| \leqslant \kappa, \qquad \forall\, t \in T\colon A_t \subseteq X.$$

Спочатку доведемо виконання нерівності

$$N_*\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) \geqslant \inf_{t\in T} N_*(A_t).$$

Нехай для множини $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$ маємо $N_*\left(\bigcap\limits_{t\in T} A_t\right) = \sup\limits_{\{E_t\}\in T} \inf\limits_{t\in T} N(E_t)$ і, відповідно, для кожної з множин A_t виконується

$$N_*(A_t) = \sup_{\{E_{ts}\}\in I_{A_t}} \inf_{s\in T} N(E_{ts}). \tag{4}$$

Сім'я множин $\{E_{ts}\}_{t,s\in T}$ є одним з внутрішніх покриттів множини $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$, причому її потужність не перевищує $\kappa^2 = \kappa$. Оскільки верхня грань множини не менша за будь-який його член, то виконується така нерівність:

$$N_*\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) = \sup_{\{E_t\}\in I_A} \inf_{t\in T} N(E_t) \geqslant \inf_{t.s\in T} N(E_{ts}) = \inf_{t\in T} \inf_{s\in T} N(E_{ts}). \tag{5}$$

З (4) випливає, що для кожного $t \in T$ можна підібрати таке внутрішнє покриття $\{E_{ts}\}$, $s \in T$, що $N_*(A_t) \leqslant \inf\limits_{t\in T} N(E_{ts}) + \varepsilon$. Підставивши цей вираз у (5), отримаємо, що $N_*\left(\bigcap\limits_{j\in T} A_j\right) \geqslant \inf\limits_{j\in T} N_*(A_j) - \varepsilon$. Оскільки ϵ може бути наскільки завгодно малим додатним числом, то

$$N_*\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) \geqslant \inf_{t\in T} N_*(A_t). \tag{6}$$

Доведемо тепер зворотну нерівність, тобто

$$N_*\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) \leqslant \inf_{t\in T} N_*(A_t).$$

Маємо, що $\bigcap\limits_{t\in T} A_t \subseteq A_t$. З монотонності внутрішньої необхідності випливає, що

$$N_*\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) \leqslant N_*(A_t).$$

Звідси отримуємо нерівність

$$N_*\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right) \leqslant \inf_{t\in T} N_*(A_t).$$

Звідси і з нерівності (6) маємо $N_*\left(\bigcap\limits_{t\in T} A_t\right) = \inf\limits_{t\in T} N_*(A_t)$.

Отримали, що $N_*(\cdot)$ — за визначенням міра необхідності і на множинах з $\mathbf{A}$ набуває значення $N(\cdot)$, що і доводить теорему.

Наслідок. *Нехай N — κ-мультиплікативна міра необхідності на $\mathbf{A}$; $\mathbf{B}$ — клас підмножин X, такий, що $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. N_* — κ-внутрішня міра необхідності, побудована за N. Тоді $N_*|_B$ — κ-мультиплікативна міра необхідності на $\mathbf{B}$, яка є продовженням.*

Далі в тексті ця міра називатиметься стандартним κ-продовженням N з $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$.

Лема 3 (транзитивність продовжень). *Нехай P — κ-адитивна міра можливості на $\mathbf{A}$; $\mathbf{B}$ і $\mathbf{C}$ — класи підмножин X, замкнені відносно скінченних об'єднань та перетинів і такі, що $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$. Нехай Q — стандартне κ-продовження P з $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$, R — стандартне κ-продовження Q з $\mathbf{B}$ на $\mathbf{C}$, H — стандартне κ-продовження P з $\mathbf{A}$ на $\mathbf{C}$. Тоді $H = R$.*

Доведення. Позначатимемо через E_t підмножини з $\mathbf{A}$, F_t — підмножини з $\mathbf{B}$. Нехай $A \in \mathbf{C}$:

$$R(A) = \inf\left\{\sup_{t\in T} Q(F_t) \mid |\{F_t, t \in T\}| \leqslant \kappa, \bigcup_{t\in T} F_t \supseteq A\right\} = \inf_{\{F_t,t\in T\}\colon \bigcup F_t \supseteq A} \sup_{t\in T} P^*(F_t).$$

За теоремою про продовження та з монотонності зовнішньої міри маємо

$$R(A) = \inf_{\{F_t,t\in T\}\colon \bigcup F_t \supseteq A} P^*\left(\bigcup_{t\in T} F_t\right) \geqslant P^*(A) = H(A).$$

З іншого боку, враховуючи, що $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, отримуємо

$$R(A) = \inf_{\{F_t,t\in T\}\colon \bigcup F_t \supseteq A} \sup_{t\in T} Q(F_t) \leqslant \inf_{\{E_t,t\in T\}\colon \bigcup E_t \supseteq A} \sup_{t\in T} Q(E_t) =$$

$$= \inf_{\{E_t,t\in T\}\colon \bigcup E_t \supseteq A} \sup_{t\in T} P(E_t) = H(A).$$

Лему доведено.

Теорема 3. *Нехай $\mathbf{B}$ — клас підмножин X, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ замкнений відносно κ-об'єднань та перетинів (як і $\mathbf{A}$). Нехай на $\mathbf{A}$ задано κ-адитивну міру можливості P, κ-мультиплікативну міру необхідності N і κ-узагальнене заперечення θ. Нехай існує продовження θ до κ-узагальненого заперечення θ_1 на $\mathbf{B}$ і існує функція $\theta_L^N\colon L \to L$ — неперервна і строго спадна бієкція, така, що $\forall\, A \in \mathbf{A}\colon P(\theta(A)) = \theta_L^N(N(A))$ (обернену до неї функцію позначимо θ_L^P). Нехай P_1, Q_1 — стандартні κ-продовження відповідно P і N з $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$. Тоді $\forall A \in \mathbf{B}\colon P_1(\theta_1(A)) = \theta_L^N(N_1(A))$.*

Доведення. Маємо

$$\theta_L^N(N_1(\theta_1(A))) = \theta_L^N\left(\sup_{\{E_t,t\in T\}\colon \bigcap E_t \subseteq \theta_1(A)} \inf_{t\in T} N(E_t)\right) =$$

$$= \inf_{\{E_t,t\in T\}\colon \bigcap E_t \subseteq \theta_1(A)} \sup_{t\in T} \theta_L^N(N(E_t)) = \inf_{\{E_t,t\in T\}\colon \bigcup \theta_1(E_t) \supseteq A} \sup_{t\in T} \theta_L^N(N(E_t)).$$

Виконавши заміну $F_t = \theta(E_t)$, отримаємо

$$\theta_L^N(N_1(\theta_1(A))) = \inf_{\{F_t,t\in T\}\colon \bigcup F_t \supseteq A} \sup_{t\in T} \theta_L^N(N(\theta(F_t))) = \inf_{\{F_t,t\in T\}\colon \bigcup F_t \supseteq A} \sup_{t\in T} P(F_t) = P_1(A).$$

Теорему доведено.

Таким чином, одержано твердження, які узагальнюють результати робіт [1–4]. Доведено існування κ-продовжень мір необхідності та можливості на булеан. Також дається означення узгодженої моделі теорії можливості та доведено умови узгодженого κ-продовження мір на довільний клас множин.

1. *Пытьев Ю. П.* Возможность. Элементы теории и применение. – Москва: УРСС, 1990. – 190 с.
2. *Бичков О. С., Колесніков К. С.* Побудова (PN)-моделі теорії можливостей // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2007. – № 1. – С. 134–138.
3. *Бычков А. С.* Об одном развитии теории возможностей // Кибернетика и систем. анализ. – 2007. – № 5. – С. 67–72.
4. *Бичков О. С.* До теорії можливостей та її застосування // Доп. НАН України. – 2007. – № 5. – С. 7–12.
5. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – **1**. – P. 3–28.
6. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. – Москва: Радио и связь, 1990. – 288 с.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 21.10.2008

O. S. Bychkov

About a consistent continuation of measures of necessity and possibility

A question about the continuation of measures of necessity and possibility from the algebra to a Boolean is considered. The theorems defining the conditions of their consistent continuation are proved. Thus, the foundations for a correct use of the theory of possibilities in solving the theoretical and applied tasks are constructed.