УДК 517.518.845

Д. Ю. Мітін

Хаусдорфова фрактальна апроксимація функцій

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Ю. Трохимчуком)

Встановлено достатні умови збіжності ітерацій оператора фрактального перетворення в просторі функцій з хаусдорфовою метрикою. Наведено оцінку похибки хаусдорфового фрактального наближення.

Питання збіжності ітерацій фрактального оператора досліджувалося в просторі обмежених функцій [1], неперервних [2], m разів неперервно диференційовних [2], інтегровних у степені $1 \leqslant p < +\infty$ [1] та $0 < p < 1$ [3], а також в сенсі поточкової збіжності та збіжності майже скрізь [4]. У даному повідомленні досліджується збіжність ітерацій фрактального оператора в просторі функцій з хаусдорфовою метрикою.

Нагадаємо деякі означення [5, 6]. Для функції $f\colon I \to \mathbb{R}$, обмеженої на відрізку $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ($f \in \mathcal{B}(I)$), позначимо через $\mathcal{G}(f) \subset \mathbb{R}^2$ її розширений графік, тобто найменшу замкнену опуклу за другою координатою множину, що містить графік f. Еквівалентним чином можна визначати $\mathcal{G}(f) = \{(x, y)\colon y \in [\mathcal{I}(f, x), \mathcal{S}(f, x)], x \in I\}$, де нижня та верхня функції Бера $\mathcal{I}(f, x) = \lim\limits_{\delta\to+0} \mathcal{I}(f, x, \delta)$, $\mathcal{S}(f, x) = \lim\limits_{\delta\to+0} \mathcal{S}(f, x, \delta)$ визначаються через розширені нижню та верхню функції Бера $\mathcal{I}(f, x, \delta) = \inf\limits_{|y-x|<\delta} f(y)$, $\mathcal{S}(f, x, \delta) = \sup\limits_{|y-x|<\delta} f(y)$ відповідно.

Ототожнюватимемо функції з однаковими розширеними графіками.

Хаусдорфовою відстанню між функціями f та g, що породжена метрикою на площині $\rho_\alpha((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \max(\alpha^{-1}|u_1 - v_1|, |u_2 - v_2|)$, $\alpha > 0$, називається

$$h_\alpha(f, g) = \max\Big(\sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(f)} \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(g)} \rho_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(g)} \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(f)} \rho_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})\Big).$$

Зазначимо, що при $\alpha \to 0+$ хаусдорфова відстань переходить у рівномірну.

Простий приклад фундаментальної послідовності

$$f_n(x) = nx\mathbb{1}_{[-1/n, 1/n]}(x), \qquad x \in I = [-1, 1], \qquad n \geqslant 1,$$

показує, що якщо накласти умову повноти на метричний простір функцій, то це призведе до необхідності розглядати сегментозначні функції. Тут і далі $\mathbb{1}_A(x)$ — індикаторна функція множини A. Функція $f\colon I \to [\mathbb{R}]$, де $[\mathbb{R}] = \{[y_1, y_2] : -\infty < y_1 \leqslant y_2 < +\infty\}$, називається сегментно-неперервною ($f \in \mathcal{SC}(I)$), якщо $\mathcal{G}(f) = f$. Мотивацією такої назви є те, що еквівалентним чином сегментно-неперервні функції визначаються співвідношенням $S-\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \subset f(x_0)$, де $S-\lim$ — сегментна границя (детальний виклад сегментного аналізу див. у [5]). Маємо $\mathcal{G}(f) \in \mathcal{SC}(I)$ для $f \in \mathcal{SC}(I)$ та $\mathcal{SC}(I)$ — поповнення $\mathcal{B}(I)$ за метрикою h_α.

Для відрізка (чи напівінтервалу) $J \subset I$ введемо позначення $\mathcal{G}(f, J) = \{(x, y) \in \mathcal{G}(f)\colon x \in J\}$,

$$h_{\alpha,J}(f, g) = \max\Big(\sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(f,J)} \inf_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(g,J)} \rho_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{G}(g,J)} \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{G}(f,J)} \rho_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})\Big).$$

Нехай дано відрізки (чи напівінтервали) $I_1, \ldots, I_n, I'_1, \ldots, I'_n$ такі, що $\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i = I$, $I_i \bigcap I_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, $I'_i \subset I$, та гомеоморфізми $\Phi_i(x,y) = (\varphi_i(x), \psi_i(x,y))$, $x \in I'_i$, $y \in \mathbb{R}$, $\varphi_i(I'_i) = I_i$, $i = 1, \ldots, n$, причому виконано умови Ліпшіца: $|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| \leqslant d'_i|x_1 - x_2|$, $|\psi_i(x_1, y_1) - \psi_i(x_2, y_2)| \leqslant d''_i \rho_\alpha((x_1, y_1), (x_2, y_2))$, x_1, $x_2 \in I'_i$, y_1, $y_2 \in \mathbb{R}$, $\max(d'_i, d''_i) =: d_i$.

Існують різні конструкції фрактальних перетворень. У даній роботі розглянемо такий оператор фрактального відображення [6–8]:

$$(T(f))(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(\varphi_i^{-1}(x), f(\varphi_i^{-1}(x)))\mathbb{1}_{I_i}(x), \qquad x \in I, \qquad f \in \mathcal{B}(I).$$

Розглянемо множину $\mathfrak{F} \subset \mathcal{B}(I)$ таку, що $T(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{F}$. Позначимо

$$\gamma_i(\mathfrak{F}) = \sup_{\substack{f,g \in \mathfrak{F} \\ f \neq g}} \frac{h_{\alpha, I'_i}(f,g)}{h_\alpha(f,g)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Твердження 1. *Нехай $\gamma_i(\mathfrak{F}) < +\infty$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Тоді оператор $T\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ є неперервним відносно метрики h_α. За неперервністю оператор T продовжується єдиним чином на $\overline{\mathfrak{F}} \subset \mathcal{SC}(I)$. Оператор T визначений коректно на фактормножині за введеним відношенням еквівалентності, тобто якщо $\mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(g)$, то $\mathcal{G}(T(f)) = \mathcal{G}(T(g))$.*

Евентуально стискуючим оператором називається такий оператор, що задовольняє умову Ліпшіца і у якого існує його степінь, що є оператором стиску. Найменший показник такого степеня називається порядком евентуально стискуючого оператора.

Умови стиску фрактального оператора було встановлено в [6] (для випадку простору хаусдорфово-неперервних функцій та оператора дещо більш спеціального вигляду). Знайдемо умови евентуального стиску.

Розглянемо тепер множину $\mathfrak{F} \subset \mathcal{SC}(I)$ таку, що $T(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{F}$.

Позначимо $L_k(T, \mathfrak{F}) = \max\limits_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n} d_{i_1} \cdots d_{i_k} \gamma_{i_1, \ldots, i_k}(\mathfrak{F})$, де

$$\gamma_{i_1, \ldots, i_k}(\mathfrak{F}) = \sup_{\substack{f,g \in \mathfrak{F} \\ f \neq g}} [h_{\alpha, \varphi_{i_1}^{-1}(I_{i_1} \cap \varphi_{i_2}^{-1}(I_{i_2} \cap \cdots \varphi_{i_k}^{-1}(I_{i_k}) \cdots))}(f,g) \cdot (h_\alpha(f,g))^{-1}].$$

Твердження 2. *Нехай $\inf\limits_{k \geqslant 1} L_k(T, \mathfrak{F}) < 1$. Тоді оператор T — евентуально стискуючий на $\mathfrak{F}$.*

Нехай тепер множина $\mathfrak{F}$ замкнена у $\mathcal{SC}(I)$.

Наслідок 1. *За умови, що оператор T евентуально стискуючий на $\mathfrak{F}$, у нього існує єдина нерухома точка $f_T^* \in \mathfrak{F}$, причому для довільної $f \in \mathfrak{F}$ маємо $T^{\circ k}(f) \to f_T^*$, $k \to \infty$, у $\mathcal{SC}(I)$.*

Часто ця нерухома точка є функцією, графік якої має дробову розмірність (наприклад, за Хаусдорфом–Безіковичем) або графіку якої притаманна певна властивість типу самоподібності. Це пояснює використання терміна “фрактальна апроксимація”.

Наведемо оцінку похибки хаусдорфового фрактального наближення, що є аналогом теореми про колаж [7, 8].

Твердження 3. *За умови, що оператор T евентуально стискуючий на $\mathfrak{F}$ порядку m, мають місце нерівності* $(L_k(T,\mathfrak{F}) = L_k)$

$$h_\alpha(f, f_T^*) \leqslant \frac{1+L_1+\cdots+L_{m-1}}{1-L_m} h_\alpha(f, T(f)) \leqslant \begin{cases} \dfrac{L_1^m-1}{L_1-1}\dfrac{1}{1-L_m} h_\alpha(f,T(f)), & L_1 \neq 1, \\ m\dfrac{1}{1-L_m} h_\alpha(f,T(f)), & L_1 = 1. \end{cases}$$

Аналогічні до наведених твердження встановлюються у випадку хаусдорфової апроксимації у просторі хаусдорфово-неперервних функцій $\mathcal{HC}(I) \subset \mathcal{SC}(I)$. Проте через його неповноту виникає необхідність накладати додаткові обмеження на множину $\mathfrak{F}$ типу одностайної хаусдорфової неперервності [6].

Також аналогічні твердження справджуються у багатовимірному випадку. Особливо цікавим є двовимірний випадок у зв'язку з його застосуванням у задачах стиску та кодування зображень [8].

1. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Фрактальна апроксимація в просторах C і L_p та її застосування в задачах кодування зображень // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 2. – С. 161–175.
2. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Інваріантність підпросторів неперервних та гладких функцій відносно фрактальних перетворень // Вісн. Київ. ун-ту. Мат. Мех. – 2007. – Вип. 18. – С. 91–96.
3. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Фрактальна апроксимація у просторах L_p, $0 < p < 1$ // Там само. – 2008. – Вип. 19. – С. 4–17.
4. *Мітін Д. Ю., Назаренко М. О.* Поточкова фрактальна апроксимація функцій // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **4**, № 1. – С. 200–211.
5. *Сендов Бл.* Хаусдорфовые приближения. – София: Болг. АН, 1979. – 372 с.
6. *Sendov Bl.* Mathematical modeling of real-world images // Constructive Approximation. – 1996. – **12**, No 1. – P. 31–65.
7. *Barnsley M. F.* Fractals everywhere. – Boston: Academic Press, 1993. – 533 p.
8. *Barnsley M. F., Hurd L. P.* Fractal image compression. – Wellesley: A. K. Peters, 1993. – 244 p.

*Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка*

Надійшло до редакції 30.09.2008

D. Yu. Mitin

Hausdorff fractal approximation of functions

Sufficient conditions for the convergence of fractal transform operator iterations in the space of functions with the Hausdorff metric are stated. An estimate for the error of the Hausdorff fractal approximation is given.