УДК 539.3:519.6

Академик НАН Украины **И. В. Сергиенко,** академик НАН Украины
В. С. Дейнека

Идентификация градиентными методами теплового и термонапряженного состояний двухслойного цилиндра по поверхностным перемещениям

Одержані явні вирази градієнтів функціонала-нев'язки та відповідні задачі для реалізації градієнтних методів розв'язання задачі ідентифікації температурного, термонапруженого станів двошарового циліндра за відомими радіальними напругами, переміщеннями на зовнішній поверхні.

В работе [1] предложена технология построения явных выражений градиентов функционалов-невязок, основанная на теории оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем [2, 3], для идентификации градиентными методами О. М. Алифанова [4] различных параметров задач термоупругости составных тел. В данной работе эта технология распространена на задачу идентификации теплового и термонапряженного состояния двухслойного цилиндра по поверхностным перемещениям. Подобная задача исследована в работе [5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим длинный двухслойный полый изотропный круговой цилиндр. С учетом симметрии, следуя [6, 7], напряженно-деформированное состояние внутреннего и внешнего цилиндров описывается уравнением равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \qquad (r,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

где $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = (r_1, \xi)$, $\Omega_2 = (\xi, r_2)$, $\Omega_T = \Omega \times (0, t^*)$, $0 < r_1 < \xi < r_2 < \infty$; r_1, r_2 — радиусы, соответственно внутренней и внешней поверхностей составного цилиндра; ξ — координата соприкосновения составляющих тела. Следуя [6], имеем

$$\begin{aligned} &\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T), \\ &\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha T), \qquad \varepsilon_r = \varepsilon_r(y) = \frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta(y) = \frac{y}{r}, \end{aligned} \tag{1'}$$

где σ_r, σ_θ, σ_z — элементы тензора напряжений; E, ν — модуль упругости, коэффициент Пуассона, соответственно, внутреннего или внешнего цилиндров; α — коэффициент линейного расширения; T — изменение температуры от начального состояния T_0, $y = y(r,t)$ — радиальное смещение точки с координатой $r \in \Omega$ в момент времени $t \in [0, t^*]$.

На внутренней и внешней поверхностях составного цилиндра заданы напряжения:

$$\sigma_r|_{r=r_i} = -p_i, \qquad i = 1, 2, \qquad t \in (0, t^*). \tag{2}$$

В точке ξ условия неидеального контакта (расклинивающего давления) [8, 9] имеют вид

$$\{\sigma_r n_0\}^{\pm} = -\overline{p}, \qquad [y] = \delta, \qquad t \in (0, t^*), \tag{3}$$

где $\{\varphi\}^{\pm} = \varphi^{\pm} = \varphi(\xi \pm 0, t)$, n_0 — внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega'_i$ составляющей Ω'_i, $i = 1, 2$, составного цилиндра $\Omega', \overline{p} = \overline{p}(t)$ — величина расклинивающего давления; δ — величина, обусловленная шереховатостью соприкасаемых поверхностей и давлением $\overline{p}$ [5, 10]. Аналогично [5], инерционными членами пренебрегаем.

Температурное состояние составного цилиндра описывается следующей начально-краевой задачей. На области Ω_T задано уравнение

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right), \qquad (r, t) \in \Omega_T. \tag{4}$$

На концах отрезка $[r_1, r_2]$ имеем краевые условия

$$T(r_i, t) = \varphi_i(t), \qquad i = 1, 2, \qquad t \in (0, t^*). \tag{5}$$

В точке $r = \xi$ — условия сопряжения слабопроницаемого прослоя:

$$\begin{aligned} &\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right] = 0, \qquad t \in (0, t^*), \\ &\left\{\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right\}^{\pm} = R[T], \qquad r = \xi, \qquad t \in (0, t^*), \end{aligned} \tag{6}$$

где $[\varphi] = \varphi^+ - \varphi^-$, R — коэффициент термического сопротивления.

При $t = 0$ известно распределение температуры

$$T(r, 0) = T_0(r), \qquad r \in \overline{\Omega}_1 \bigcup \overline{\Omega}_2. \tag{7}$$

Аналогично [5], предполагаем, что распределение температуры на внутренней поверхности составного цилиндра является неизвестным, т. е. является неизвестной функция $T = \varphi_1(t)$. Необходимо определить функцию $\varphi_1(t)$, $t \in (0, t^*)$, температурное поле двухслойного цилиндра, а также его термонапряженное состояние, если дополнительно известно изменение во времени радиального смещения внешней поверхности составного цилиндра, т. е.

$$y(r_2, t) = \varphi_*(t), \qquad t \in (0, t^*), \tag{8}$$

где $\varphi_*(t)$ — заданная функция.

Задачу (1)–(8) будем решать с помощью градиентных методов О. М. Алифанова [4], для которых на основе теории оптимального управления состояниями многокомпонентных распределенных систем [2, 3], аналогично [1], построим явные выражения градиента функционала-невязки

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t^*} (y(u; r_2, t) - \varphi_*(t))^2 dt, \tag{9}$$

где $y = y(u) = y(u; r, t)$ — решение задачи (1)–(3), с учетом решения задачи (4)–(7) при заданном потоке тепла на внутренней поверхности $u = u(t) \in U = C([0, t^*])$, т. е. в задаче (4)–(7) вместо условия Дирихле на внутренней поверхности используем краевое условие

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = u(t), \qquad t \in (0, t^*), \tag{10}$$

а на внешней — условие Дирихле

$$T(r_2,t)=\varphi_2(t), \qquad t\in(0,t^*). \tag{11}$$

Легко видеть, что если мы определим функцию $u(t)\in U$, при которой первая компонента решения $Y=(y,T)$ задачи (1)–(4), (6), (7), (10), (11) удовлетворяет равенству (8), то тем самым мы решим исходную задачу (1)–(8), т. е. эти задачи эквивалентны.

Вместо задачи (1)–(4), (6)–(8), (10), (11) будем решать задачу (1)–(4), (6), (7), (9)–(11), состоящую в нахождении элемента u, минимизирующего на U функционал-невязку (9) при ограничениях (1)–(4), (6), (7), (10), (11).

Так как

$$\begin{aligned}\sigma_r=\sigma_r(y)&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_r(y)+\lambda\varepsilon_\theta(y)-\frac{E}{1-\nu}\alpha T,\\ \sigma_\theta=\sigma_\theta(y)&=\lambda\varepsilon_r(y)+(\lambda+2\mu)\varepsilon_\theta(y)-\frac{E}{1-\nu}\alpha T,\end{aligned} \tag{12}$$

где $\lambda=\nu E/(1-\nu^2)$, $\mu=E/2(1+\nu)$ — постоянные Ламе (в общем случае различные для областей Ω_1, Ω_2), уравнение равновесия (1) можно представить в виде

$$-\left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right)-(\lambda+2\mu)\frac{y}{r}\right\}+\frac{rE}{1-\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial r}=0, \qquad r\in\Omega_1\bigcup\Omega_2. \tag{13}$$

Домножив левую часть равенства (13) на произвольную функцию $z_1(r)\in V_0^1=\{v(r)\colon v|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,2,\ [v]|_{r=\xi}=0\}$ и проинтегрировав результат по области Ω, с учетом (2), (3), (12) получим:

$$\begin{aligned}&-\int\limits_{r_1}^{r_2}\left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right)-(\lambda+2\mu)\frac{y}{r}\right\}z_1dr+\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{rE}{1-\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial r}z_1dr=-r\sigma_r(y)z_1|_{r_1}^{\xi-0}-\\ &\quad-r\sigma_r(y)z_1|_{\xi+0}^{r_2}+\int\limits_{r_1}^{r_2}r\{\overline{\sigma}_r(y)\varepsilon_r(z_1)+\lambda\varepsilon_r(y)\varepsilon_\theta(z_1)+(\lambda+2\mu)\varepsilon_\theta(y)\varepsilon_\theta(z_1)\}dr-\\ &\quad-\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\alpha rE}{1-\nu}T\frac{\partial z_1}{\partial r}dr+\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{E\alpha T}{1-\nu}z_1dr=\int\limits_{r_1}^{r_2}r\{\overline{\sigma}_r(y)\varepsilon_r(z_1)+\overline{\sigma}_\theta(y)\varepsilon_\theta(z_1)\}dr+\\ &\quad+p_2r_2z_1(r_2)+2p\xi z_1(\xi)-p_1r_1z_1(r_1)-\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{rE\alpha}{1-\nu}T\frac{\partial z_1}{\partial r}dr+\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{E\alpha T}{1-\nu}z_1dr,\end{aligned} \tag{14}$$

где $\overline{\sigma}_r=\sigma_r+(E/(1-\nu))\alpha T$, $\overline{\sigma}_\theta=\sigma_\theta+(E/(1-\nu))\alpha T$, $W_2^1(\Omega_i)$ — пространство функций Соболева.

Следовательно, с учетом (14) и результатов работы [2] при каждом фиксированном $u\in U$ вместо классического решения задачи (1)–(4), (6), (7), (10), (11) можем использовать ее обобщенное решение, т. е. вектор-функцию $Y=(y(r,t),\,T(r,t))\in W(0,t^*)$, которая $\forall z=(z_1(r),z_2(r))\in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$a(y,z_1)=l(T;z_1), \qquad t\in(0,t^*), \tag{15}$$

$$\left(rc\frac{\partial T}{\partial t}, z_1\right) + a_1(T, z_2) = l_1(u; z_2), \qquad t \in (0, t^*), \tag{16}$$

$$T|_{t=0} = T_0, \qquad r \in \overline{\Omega}_1 \bigcup \overline{\Omega}_2, \tag{17}$$

где

$$a(y, z_1) = \int\limits_{r_1}^{r_2} r((\lambda + 2\mu)\varepsilon_r(y)\varepsilon_r(z_1) + \lambda(\varepsilon_\theta(y)\varepsilon_r(z_1) + \varepsilon_r(y)\varepsilon_\theta(z_1)) +$$

$$+ (\lambda + 2\mu)\varepsilon_\theta(y)\varepsilon_\theta(z_1))dz_1 =$$

$$= \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r(y)\varepsilon_r(z_1) + \nu(\varepsilon_\theta(y)\varepsilon_r(z_1) + \varepsilon_r(y)\varepsilon_\theta(z_1)) + \varepsilon_\theta(y)\varepsilon_\theta(z_1))rdr,$$

$$\begin{aligned} &l(T; z_1) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{rE\alpha}{1-\nu} T(\varepsilon_r(z_1) - \varepsilon_\theta(z_1))dr - p_2 z_1 r|_{r=r_2} + p_1 z_1 r|_{r=r_1} - 2\overline{p} z_1 r|_{r=\xi}, \\ &a_1(T, z_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} r\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial z_2}{\partial r}dr + \xi R[T][z_2]\big|_{r=\xi}, \qquad l_1(u; z_2) = r_1 u z_2(r_1), \end{aligned} \tag{18}$$

$$W(0, t^*) = \Big\{(y, T)\colon y|_{\Omega_i},\ T|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2,\ [y]|_{r=\xi} = \delta,\ T(r_2, t) = \varphi_2(t),$$

$$\forall t \in (0, t^*),\ \frac{\partial T}{\partial t} \in L^2(0, t^*; L_2(\Omega))\Big\},$$

$$V_0 = \{z = (z_1(r), z_2(r))\colon z_1|_{\Omega_i}, z_2|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2,\ [z_1]|_{r=\xi} = 0,\ z_2(r_2) = 0\}.$$

Теорема 1. *При каждом фиксированном $u \in U$ задача* (15)–(17) *имеет единственное решение $Y \in W(0, T)$.*

Доказательство. Справедливость теоремы следует из того, что при каждом фиксированном $u \in U$, следуя [2, 3], легко установить существование решения $T(r, t)$ задачи (16), (17). С учетом того, что при каждом $t \in (0, t^*)$ $\forall z_1$ $a(z_1, z_1) \geqslant \alpha_0 \int\limits_{r_1}^{r_2} (\varepsilon_r^2(z_1) + \varepsilon_\theta^2(z_1))dr \geqslant \geqslant \alpha_0' \int\limits_{r_1}^{r_2} z_1^2 dr$ и ограниченности $|a(y, z_1)| \leqslant \alpha_1 \|y\|_{W_2^1} \|z_1\|_{W_2^1}$, $|l(T; z_1)| \leqslant \alpha_2 \|z_1\|_{W_2^1}$ на основании леммы Лакса–Мильграма [11] решение y задачи (15) существует при каждых фиксированных $t \in (0, t^*)$, $T(u; r, t)$. Теорема доказана.

Полученную задачу (15)–(17), (9) будем решать приближенно с помощью градиентных методов О. М. Алифанова [4], где $(n+1)$-е приближение u_{n+1} решения $u \in U$ находим по формуле

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, n^*, \tag{19}$$

начиная с некоторого начального приближения $u_0 \in U$, где направление спуска p_n и коэффициент β_n определяем, используя выражения:

для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \qquad \beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}, \tag{20}$$

для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \qquad \beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}, \tag{21}$$

для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \qquad \gamma_0 = 0, \qquad \gamma_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2}, \qquad \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\|Ap_n\|^2}, \tag{22}$$

где J'_{u_n} — градиент функционала $J(u)$ в точке $u = u_n$, $e_n = Au_n - \varphi_*$, $Au_n = y(u_n; r_2, t)$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} &\pi(u,v) = (\overline{Y}(u) - \overline{Y}(0), \overline{Y}(v) - \overline{Y}(0)),\\ &L(v) = (\varphi_* - \overline{Y}(0), \overline{Y}(v) - \overline{Y}(0)), \end{aligned} \tag{23}$$

где $\forall v \in U$ $\overline{Y}(v) = y(v; r, t)|_{r=r_2}$, $y(v; r, t)$ — первая компонента решения $Y = (y, T)$ задачи (15)–(17) при $u = v$, $(\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = \int\limits_0^{t^*} \overline{\varphi}\overline{\psi} dt$. Легко видеть

$$2J(v) = \pi(v,v) - 2L(v) + (\varphi_* - \overline{Y}(0), \varphi_* - \overline{Y}(0)). \tag{24}$$

С учетом (23), (24) при u, $v \in U$ $\forall \lambda \in (0,1)$, аналогично [12, 13], имеем

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u + \lambda(v-u)) - J(u)}{\lambda} = \pi(u, v-u) - L(v-u) =\\ &\qquad = (\overline{Y}(u) - \varphi_*, \overline{Y}(v) - \overline{Y}(u)) = \langle J'_u, v-u \rangle. \end{aligned} \tag{25}$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in U$ задачи (15)–(17), (9), следуя [1], введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial r}\sigma_r(\psi) - \frac{\sigma_r(\psi) - \sigma_\theta(\psi)}{r} = 0, \qquad r \in \Omega, \qquad t \in (0, t^*),\\ &\sigma_r(\psi)|_{r=r_2} = \frac{1}{r_2}(y(u_n; r_2, t) - \varphi_*(t)), \qquad \sigma_r(\psi)|_{r=r_1} = 0,\\ &[\psi]|_{r=\xi} = 0, \qquad [\sigma_r^{\pm}(\psi)]|_{r=\xi} = 0, \qquad t \in (0, t^*),\\ &-c\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda \frac{\partial p}{\partial r}\right) - \frac{E}{1-\nu}\alpha(\varepsilon_r(\psi) - \varepsilon_\theta(\psi)) = 0, \qquad r \in \Omega, \qquad t \in (0, t^*),\\ &-\lambda \frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = 0, \qquad p(r_2, t) = 0, \qquad t \in (0, t^*),\\ &\left[\lambda \frac{\partial p}{\partial r}\right] = 0, \qquad \left\{\lambda \frac{\partial p}{\partial r}\right\}^{\pm} = R[p], \qquad r = \xi, \qquad t \in (0, t^*),\\ &p|_{t=t^*} = 0, \qquad r \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \tag{26}$$

где $\sigma_r(\psi) = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r(\psi) + \nu\varepsilon_\theta(\psi))$.

Определение 1. Обобщенным решением дифференциальной задачи (26) называется вектор-функция $(\psi, p) \in W_0(0, t^*)$, которая $\forall\, z = (z_1, z_2) \in V_0$ удовлетворяет равенствам

$$a(\psi, z_1) = (y(u_n; r_2, t) - \varphi_*(t))z_1(r_2), \qquad t \in (0, t^*), \tag{27}$$

$$-\left(rc\frac{\partial p}{\partial t}, z_2\right) + a_1(p, z_2) + \left(r\frac{E}{1-\nu}\alpha(\varepsilon_r(\psi) - \varepsilon_\theta(\psi)), z_2\right) = 0, \qquad t \in (0, t^*), \tag{28}$$

$$p|_{t=t^*} = 0_0, \qquad r \in \overline{\Omega}, \tag{29}$$

где $W_0(0, T) = \{(\psi, T)\colon \psi|_{\Omega_i},\ p|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2,\ [\psi]|_{r=\xi} = 0, p(r_2, t) = 0,\ \forall\, t \in (0, t^*),$ $\partial p/\partial t \in L^2(0, t^*; L_2(\Omega))\}$.

Теорема 2. *Решение* $(\psi, p) \in W_0(0, t^*)$ *задачи* (27)–(29) *существует и единственое.*

Заменив в (27) z_1 разностью $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, а в (28) z_2 разностью $T(u_{n+1}) - T(u_n)$, с учетом (15)–(17) получаем

$$\int\limits_0^{t^*} (y(u_n; r_2, t) - \varphi_*(t))(y(u_{n+1}) - y(u_n))|_{r=r_2} dt = \int\limits_0^{t^*} a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n))\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^{t^*} \left(rc\frac{\partial}{\partial t}(T(u_{n+1}) - T(u_n)), p\right) dt + \int\limits_0^{t^*} a_1(T(u_{n+1}) - T(u_n), p)\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^{t^*} \left(\frac{Er}{1-\nu}\alpha(T(u_{n+1}) - T(u_n)), (\varepsilon_r(\psi) - \varepsilon_\theta(\psi))\right) dt = \int\limits_0^{t^*} r_1 \Delta u_n p|_{r=r_1} dt,$$

т. е.

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n\rangle = \int\limits_0^{t^*} r_1 p|_{r=r_1} \Delta u_n dt. \tag{30}$$

Или

$$J'_{u_n} = r_1 p|_{r=r_1}, \qquad \|J'_{u_n}\| = \left(\int\limits_0^{t^*} (r_1 p|_{r=r_1})^2 dt\right)^{1/2},$$

где p — вторая компонента решения (ψ, p) задачи (27)–(29).

Наличие градиента J'_{u_n} позволяет реализовать один из градиентных методов (19), (20); (19), (21); (19), (22) для определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in U$ задачи (15)–(17), (9).

Используемый итерационный процесс прекращается при достижении минимального значения функционала (9) или при достаточно малых его значениях. Варьируя значениями u_0 (начального приближения), можно добиться меньших значений $J(u_n)$, а заодно и повысить точность приближения искомого решения $u(t) \in U$.

Замечание 1. Если предположим, что $u(t) \in H_m = \left\{u_m(t) = \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i\varphi_i(t)\right\}$, где $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^m$ — система линейно независимых функций, то $U = R^m$, то на основании (30) получаем:

$$\langle J'_{u_n}, \Delta\alpha \rangle = \sum_{i=1}^{m} \Delta\alpha_i \int\limits_0^{t^*} r_1 \varphi_i(t) p(r_1, t)\, dt.$$

Следовательно,

$$J'_{u_n} = \widetilde{\psi}, \tag{31}$$

где

$$\widetilde{\psi}_n = \{\widetilde{\psi}_i\}_{i=1}^{m}, \qquad \widetilde{\psi}_i = \int\limits_0^{t^*} r_1 \varphi_i(t) p(r_1, t)\, dt, \qquad i = \overline{1, m}. \tag{32}$$

Используя градиент $J'_{u_n} = \widetilde{\psi}$ (31), (32), получим параметрический способ реализации градиентных методов (19) для решения задачи (15)–(17), (9), т. е. задачи (1)–(8).

1. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* Решение комплексных обратных задач термоупругости // Пробл. управления и информатики. – 2007. – № 5. – С. 64–87.
2. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 506 с.
3. *Sergienko I. V., Deineka V. S.* Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. – New York: Kluwer. – 2005. – 400 p.
4. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1988. – 288 с.
5. *Ясинский А. В.* Идентификация теплового и термонапряженного состояний двухслойного цилиндра по поверхностным перемещениям // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 1. – С. 40–47.
6. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
7. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
8. *Сергиенко И. В., Дейнека В. С.* К определению осесимметричного напряженного состояния составного тела при расклинивающем давлении // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 1. – С. 50–57.
9. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.
10. *Демкин Н. Б.* Контактирование шероховатых поверхностей. – Москва: Наука, 1970. – 228 с.
11. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – Москва: Мир, 1980. – 512 с.
12. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление. – Киев: Наук. думка, 2007. – 703 с.
13. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – Москва: Мир, 1972. – 414 с.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 10.02.2009

Academician of the NAS of Ukraine **I. V. Sergienko,** Academician of the NAS of Ukraine **V. S. Deineka**

Identification of thermal and thermostressed states of a double-layer cylinder by surface displacements by using gradient methods

We got the explicit expressions of gradients of the functional misalignment and constructed the adequate tasks by using the gradient method for the identification of thermal and thermostressed states of a double-layer cylinder by the known radial stresses and displacements on the outer surface.