УДК 539.3

А. Я. Григоренко, С. А. Мальцев

Решение задач о свободных колебаниях конических оболочек переменной толщины

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л. П. Хорошуном)

Наводиться чисельно-аналітичний підхід для дослідження вільних коливань тонких конічних ізотропних оболонок змінної товщини, який базується на сплайн-апроксимації невідомих функцій. Розрахунки виконані для різних типів граничних умов. Досліджено вплив змінної товщини на характер поведінки динамічних характеристик.

Конические оболочки переменной толщины находят широкое применение во многих отраслях современной техники. Одним из важных аспектов обеспечения прочности отмеченных упругих тел является получение информации об их свободных колебаниях.

В данной работе предлагается эффективная численная методика исследования свободных колебаний конических оболочек переменной в окружном направлении толщины. В основу методики положено применение сплайн-апроксимации и метода коллокации, с помощью которых исходная краевая задача на собственные значения для систем дифференциальных уравнений в частных производных сводится к соответствующей задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Последняя решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [1, 2]. Такой подход для решения ряда динамических задач был применен в [3–6]. Предлагаемая методика позволяет провести исследование свободных колебаний конических оболочек с произвольным законом изменения толщины при сложных граничных условиях.

Исходные соотношения. Будем рассматривать задачу о свободных колебаниях конической оболочки переменной толщины $h(s,\theta)$ в криволинейной ортогональной системе координат (s,θ), где s — длина дуги меридиана; θ — центральный угол в параллельном круге.

Согласно теории тонких оболочек Кирхгофа–Лява, уравнения, описывающие свободные колебания конических оболочек, будут иметь вид [3]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}(rN_s)+\frac{\partial S}{\partial\theta}-\cos\varphi N_\theta=r\rho h\frac{\partial^2 u(s,\theta,\omega)}{\partial t^2};\\
&\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial s}(rS)+\cos\varphi S+\sin\varphi\left(Q_\theta+\frac{\partial H}{\partial s}\right)=r\rho h\frac{\partial^2 v(s,\theta,\omega)}{\partial t^2};\\
&\frac{\partial}{\partial s}(rQ_s)+\frac{\partial Q_\theta}{\partial\theta}-\sin\varphi N_\theta=r\rho h\frac{\partial^2 w(s,\theta,\omega)}{\partial t^2};\\
&\frac{\partial}{\partial s}(rM_s)+\frac{\partial H}{\partial\theta}-\cos\varphi M_\theta-rQ_s=0;\\
&\frac{\partial}{\partial s}(rH)+\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}+\cos\varphi H-rQ_\theta=0,
\end{aligned}\qquad(1)$$

где φ — угол, образованный нормалью к координатной поверхности и осью вращения; r — радиус параллельного круга; t — время; u, v, w — перемещения точек срединной поверхности; ρ — плотностьматериала; ω — частота свободных колебаний оболочки.

Представим связь между деформациями и перемещениями:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s}; \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{r}u + \frac{\sin\varphi}{r}w; \qquad \varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos\varphi}{r}v;\\
&\chi_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \qquad \chi_\theta = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial w}{\partial s}; \qquad \chi_{s\theta} = \frac{\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Для нормальных и сдвигающих усилий N_s, N_θ и S, сгибающих и крутильных моментов M_s, M_θ и H при условии изотропного материала справедливы такие соотношения:

$$\begin{aligned}
&N_s = D_N(\varepsilon_s + \nu\varepsilon_\theta); \qquad N_\theta = D_N(\nu\varepsilon_s + \varepsilon_\theta); \qquad S = \frac{1-\nu}{2}D_N\varepsilon_{s\theta};\\
&M_s = D_M(\chi_s + \nu\chi_\theta); \qquad M_\theta = D_M(\nu\chi_s + \chi_\theta); \qquad H = D_M(1-\nu)\chi_{s\theta}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Жесткостные коэффициенты оболочки задаются формулами

$$D_N = \frac{Eh}{1-\nu}; \qquad D_M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}.$$

Здесь E, ν — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Из системы уравнений (1)–(3) получим три эквивалентных дифференциальных уравнения относительно трех перемещений u, v и w точек срединной поверхности оболочки [3, 4]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = F_u\left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, v, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial s\partial \theta}, w, \frac{\partial w}{\partial s}, \omega\right);\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = F_v\left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial s\partial \theta}, v, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, w, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial s\partial \theta},\right.\\
&\qquad \left.\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\partial \theta}, \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}, \omega\right);\\
&\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = F_w\left(u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial \theta}, w, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial s\partial \theta}, \frac{\partial^3 w}{\partial s^3}, \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^3 w}{\partial s\partial \theta^2},\right.\\
&\qquad \left.\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\partial \theta}, \frac{\partial^4 w}{\partial s^4}, \frac{\partial^4 w}{\partial s^2\partial \theta^2}, \omega\right),
\end{aligned} \tag{4}$$

где F_u, F_v, F_w — линейные дифференциальные операторы.

На контурах $s = s_0$, s_a и $\theta = 0$, b задаются следующие граничные условия, которые определяются через перемещения:

1) жесткое закрепление всех контуров

$$\begin{aligned}
&u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \theta} \qquad \text{при} \qquad \theta = 0, b;\\
&u = v = w = \frac{\partial w}{\partial s} \qquad \text{при} \qquad s = s_0, s_a;
\end{aligned} \tag{5}$$

2) жесткое закрепление трех контуров и шарнирное опирание одного

$$
\begin{aligned}
&u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \theta} && \text{при} && \theta = 0;\\
&u = \frac{\partial v}{\partial \theta} = w = \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} && \text{при} && \theta = b;\\
&u = v = w = \frac{\partial w}{\partial s} && \text{при} && s = s_0, s_a.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Методика решения. Решение системы уравнений (4) будем искать в виде

$$
u = \sum_{i=0}^{N} u_i(\theta)\varphi_i(s), \qquad v = \sum_{i=0}^{N} v_i(\theta)\chi_i(s), \qquad w = \sum_{i=0}^{N} w_i(\theta)\psi_i(s), \tag{7}
$$

где $u_i(\theta)$, $v_i(\theta)$, $w_i(\theta)$ $(i = 0, \dots, N)$ — искомые функции; $\varphi_i(s)$, $\chi_i(s)$ — функции, построенные с помощью B-сплайнов третьей степени $(N \geqslant 4)$, $\psi_i(s)$ — функции, построенные с помощью B-сплайнов пятой степени $(N \geqslant 6)$. Выбор функций $\varphi_i(s)$, $\chi_i(s)$, $\psi_i(s)$ обусловлен требованиями удовлетворить граничные условия при $s = \text{const}$ с помощью линейных комбинаций B-сплайнов 3-й и 5-й степени соответственно [1].

Подставив (7) в уравнения (4), будем требовать, чтобы они удовлетворялись в заданных точках коллокации $\xi_k \in [s_a, s_b]$, $k = 0, \dots, N$. В случае четного числа узлов сетки $(N = 2n + 1,\ n \geqslant 3)$ и при условии, что узлы коллокации удовлетворяют требованиям $\xi_{2i} \in [s_{2i}, s_{2i+1}]$, $\xi_{2i+1} \in [s_{2i}, s_{2i+1}]$, $(i = 0, \dots, N)$, на отрезке $[s_{2i}, s_{2i+1}]$ имеем два узла коллокации, а на соседних отрезках $[s_{2i+1}, s_{2i+2}]$ узлы коллокации отсутствуют. На каждом из отрезков s_{2i}, s_{2i+1} точки коллокации выбираются следующим образом:

$$
\xi_{2i} = s_{2i} + z_1 h, \qquad \xi_{2i+1} = s_{2i} + z_2 h \qquad (i = 0, \dots, N),
$$

где h — шаг сетки; z_1, z_2 — корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0, 1]$, которые равняются: $z_1 = 1/2 - \sqrt{3}/6$ и $z_2 = 1/2 + \sqrt{3}/6$. Такой выбор точек коллокации является оптимальным и существенно повышает порядок точности аппроксимации. После всех преобразований получим систему $8(N + 1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно u_i, v_i, w_i. Если ввести обозначения

$$
\begin{aligned}
&\Phi_l = [\varphi_i^{(l)}(\xi_k)], \qquad X_l = [\chi_i^{(l)}(\xi_k)], \qquad \Psi_l = [\psi_i^{(l)}(\xi_k)],\\
&i, k = 0, \dots, N, \qquad l = 0, \dots, 2, \qquad m = 0, \dots, 4;\\
&\overline{u}^T = \{u_0, \dots, u_N\}, \qquad \overline{v}^T = \{v_0, \dots, v_N\}, \qquad \overline{w}^T = \{w_0, \dots, w_N\};\\
&\overline{a}_{1r}^T = \{a_{1r}(\theta, \xi_0), \dots, a_{1r}(\theta, \xi_N)\}, \qquad r = 1, \dots, 10;\\
&\overline{a}_{2r}^T = \{a_{2r}(\theta, \xi_0), \dots, a_{2r}(\theta, \xi_N)\}, \qquad r = 1, \dots, 16;\\
&\overline{a}_{3r}^T = \{a_{3r}(\theta, \xi_0), \dots, a_{3r}(\theta, \xi_N)\}, \qquad r = 1 \dots 15;\\
&\overline{a}_{111}^T = \{a_{111}(\theta, \xi_0, \omega), \dots, a_{111}(\theta, \xi_N, \omega)\}; \qquad \overline{a}_{217}^T = \{a_{217}(\theta, \xi_0, \omega), \dots, a_{217}(\theta, \xi_N, \omega)\};\\
&\overline{a}_{316}^T = \{a_{316}(\theta, \xi_0, \omega), \dots, a_{316}(\theta, \xi_N, \omega)\};
\end{aligned}
$$

а также для матрицы $A = [a_{ij}]$ $(i, j = 0, \ldots, N)$, и вектора $\overline{c} = \{c_0, \ldots, c_N\}$ обозначить через $\overline{c} \cdot A$ матрицу $[c_i \cdot a_{ij}]$, то система дифференциальных уравнений запишется в виде

$$\begin{cases} \overline{u}'' = \Phi_0^{-1}\{(\overline{a}_{12} \cdot \Phi_2 + \overline{a}_{13} \cdot \Phi_1 + \overline{a}_{14} \cdot \Phi_0 + \overline{a}_{111} \cdot \Phi_0)\overline{u} + (\overline{a}_{11} \cdot \Phi_0)\overline{u}' + \\ \qquad + (\overline{a}_{17} \cdot X_1 + \overline{a}_{18} \cdot X_0)\overline{v} + (\overline{a}_{15} \cdot X_1 + \overline{a}_{16} \cdot X_0)\overline{v}' + (\overline{a}_{19} \cdot \Psi_1 + \overline{a}_{110} \cdot \Psi_0)\overline{w}\}, \\ \overline{v}'' = X_0^{-1}\{(\overline{a}_{23} \cdot \Phi_1 + \overline{a}_{24} \cdot \Phi_0)\overline{u} + (\overline{a}_{21} \cdot \Phi_1 + \overline{a}_{22} \cdot \Phi_0)\overline{u}' + \\ \qquad + (\overline{a}_{26} \cdot X_2 + \overline{a}_{27} \cdot X_1 + \overline{a}_{28} \cdot X_0 + \overline{a}_{217} \cdot X_0)\overline{v} + (\overline{a}_{25} \cdot X_0)\overline{v}' + \\ \qquad + (\overline{a}_{214} \cdot \Psi_2 + \overline{a}_{215} \cdot \Psi_1 + \overline{a}_{216} \cdot \Psi_0)\overline{w} + (\overline{a}_{211} \cdot \Psi_2 + \overline{a}_{212} \cdot \Psi_1 + \overline{a}_{213} \cdot \Psi_0)\overline{w}' + \\ \qquad + (\overline{a}_{210} \cdot \Psi_0)\overline{w}'' + (\overline{a}_{29} \cdot \Psi_0)\overline{w}'''\}, \\ \overline{w}^{IV} = \Psi_0^{-1}\{(\overline{a}_{31} \cdot \Phi_1 + \overline{a}_{32} \cdot \Phi_0)\overline{u} + (\overline{a}_{33} \cdot X_0)\overline{v}' + \\ \qquad + (\overline{a}_{311} \cdot \Psi_4 + \overline{a}_{312} \cdot \Psi_3 + \overline{a}_{313} \cdot \Psi_2 + \overline{a}_{314} \cdot \Psi_1 + \overline{a}_{315} \cdot \Psi_0 + \overline{a}_{316} \cdot \Psi_0)\overline{w} + \\ \qquad + (\overline{a}_{38} \cdot \Psi_2 + \overline{a}_{39} \cdot \Psi_1 + \overline{a}_{310} \cdot \Psi_0)\overline{w}' + \\ \qquad + (\overline{a}_{35} \cdot \Psi_2 + \overline{a}_{36} \cdot \Psi_1 + \overline{a}_{37} \cdot \Psi_0)\overline{w}'' + (\overline{a}_{34} \cdot \Psi_0)\overline{w}'''\}, \end{cases} \tag{8}$$

где $u_i^{(k)} = u_i^{(k)}(\theta, \xi_i)$, $v_i^{(k)} = v_i^{(k)}(\theta, \xi_i)$, $w_i^{(l)} = w_i^{(l)}(\theta, \xi_i)$, $k = 0, 1$, $l = 0, \ldots, 3$, $i = 0, \ldots, N$.

Полученную систему (8) обыкновенных дифференциальных уравнений можно привести к нормальному виду:

$$\frac{d\overline{Y}}{d\theta} = A(\theta, \omega)\overline{Y} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant b), \tag{9}$$

где

$$\overline{Y}^T = \{u_0, \ldots, u_N, u_0', \ldots, u_N', v_0, \ldots, v_N, v_0', \ldots, v_N', w_0, \ldots, w_N, w_0', \ldots, w_N', \\ w_0'', \ldots, w_N'', w_0''', \ldots, w_N'''\},$$

$A(\theta, \omega)$ — квадратная матрица порядка $8(N + 1) \times 8(N + 1)$.

Граничные условия (5), (6) для системы (9) можно записать в виде

$$B_1\overline{Y}(0) = \overline{0}, \qquad B_2\overline{Y}(b) = \overline{0}. \tag{10}$$

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) с граничными условиями (10) решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [1, 8].

Решение задачи. Анализ результатов. Упругие характеристики материала исследуемых оболочек таковы: $E = 1 \cdot 10^{-6}$ Па, $\nu = 0{,}3$, $\rho = 1$ кг/м^3.

Расчеты, проведенные по методу сплайн-коллокации при разном количестве точек коллокации, практически совпадают ($N = 10$, $N = 12$, $N = 14$). Данные расчетов приведены для $N = 12$.

Для всех исследуемых панелей угол раствора $b = \pi/2$.

Проверка достоверности получаемых результатов осуществлялась путем сравнения частот цилиндрической оболочки ($R = 0{,}1$ м, $L = 0{,}4$ м, $h_0 = 0{,}002$ м) с частотами близких к ней конических оболочек эквивалентной массы со следующими геометрическими параметрами: $R_1 = 0{,}095$ м, $R_2 = 0{,}105$ м, $L = 0{,}4$ м, $h_0 = 0{,}002$ м (будем обозначать такой вариант геометрических параметров — C); $R_1 = 0{,}09$ м, $R_2 = 0{,}11$ м, $L = 0{,}4$ м, $h_0 = 0{,}002$ м (будем обозначать такой вариант геометрических параметров — D). Рассматривался случай шарнирного опирания всех контуров. Для цилиндрической панели задача решалась путем аппроксимации функций перемещений двойными рядами Фурье [9]:

$$u = \sum_i \sum_j A_{ij} \cos \frac{m\pi s}{L} \sin \frac{nq}{R} e^{i\omega t},$$
$$v = \sum_i \sum_j B_{ij} \sin \frac{m\pi s}{L} \cos \frac{nq}{R} e^{i\omega t}, \tag{11}$$
$$w = \sum_i \sum_j C_{ij} \cos \frac{m\pi s}{L} \sin \frac{nq}{R} e^{i\omega t}.$$

Решение этой системы осуществлялось методом пошагового поиска и сравнивалось с частотами, полученными методом сплайн-коллокации для данной панели и близкими к ней коническими оболочками. В табл. 1 приведены следующие результаты расчета собственных частот для указанных граничных условий: A — задача решалась для случая цилиндрической панели с помощью аналитического подхода (11); B — задача решалась для случая цилиндрической панели с помощью предложенной численной методики; C, D — задача решалась для случая конических оболочек, геометрические параметры которых близки к рассматриваемой цилиндрической панели.

На основании предлагаемой методики были исследованы конические изотропные оболочки, жестко закрепленные по всем контурам с переменной в окружном направлении толщиной со следующими геометрическими параметрами: $R_1 = 0{,}05$ м, $R_2 = 0{,}15$ м, $L = 0{,}4$ м, $b = \pi/2$ (оболочку данной геометрии обозначим КП1); $R_1 = 0{,}0$ м, $R_2 = 0{,}2$ м, $L = 0{,}4$ м, $b = \pi/2$ (оболочку данной геометрии обозначим КП2), где L — длина образующей; R_1, R_2 — радиусы торцевых поверхностей; b — угол раствора конической панели.

Толщина исследуемых оболочек изменялась по следующему закону:

$$h = h_0(1 + \alpha \cos\theta) \tag{12}$$

где $-0{,}2 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}2$; h_0 — толщина оболочки постоянной толщины и эквивалентной массы (в расчетах $h_0 = 0{,}002$ м). Результаты расчетов собственных частот указанных выше конических оболочек с соответствующими граничными условиями для различных значений параметра α приведены в табл. 2.

На основании данных табл. 2 можно проследить характер различия значений собственных частот конических оболочек с переменной толщиной относительно оболочек с постоянной толщиной. Различие значений частот возрастает при увеличении параметра α и на более высоких частотах.

Таблица 1

	ω_i, Гц			
ω_i	A	B	C	D
ω_1	1,010E-03	9,653E-04	9,614E-04	9,582E-04
ω_2	1,201E-03	1,165E-03	1,155E-03	1,143E-03
ω_3	1,663E-03	1,640E-03	1,640E-03	1,646E-03
ω_4	2,161E-03	2,142E-03	2,116E-03	2,062E-03

Таблица 2

Тип оболочки	ω_i	α				
		−0,2	−0,1	0	0,1	0,2
КП1	ω_1	1,96E-03	2,03E-03	2,09E-03	2,16E-03	2,22E-03
	ω_2	2,07E-03	2,18E-03	2,29E-03	2,39E-03	2,49E-03
	ω_3	2,73E-03	2,87E-03	3,00E-03	3,12E-03	3,23E-03
	ω_4	2,93E-03	3,07E-03	3,20E-03	3,34E-03	3,46E-03
КП2	ω_1	1,77E-03	1,84E-03	1,92E-03	1,99E-03	2,06E-03
	ω_2	1,86E-03	1,93E-03	2,00E-03	2,06E-03	2,11E-03
	ω_3	2,37E-03	2,47E-03	2,57E-03	2,67E-03	2,77E-03
	ω_4	2,65E-03	2,79E-03	2,91E-03	3,03E-03	3,13E-03

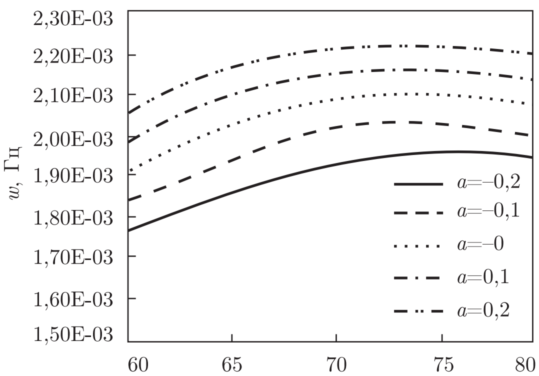

Рис. 1

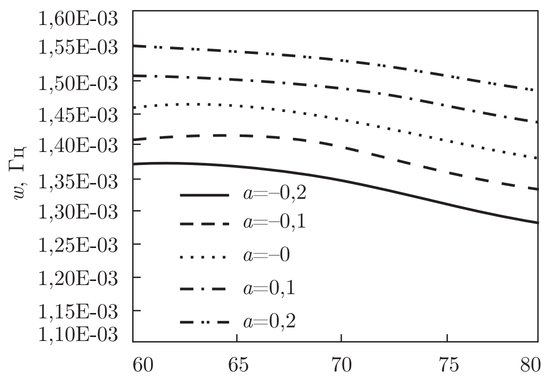

Рис. 2

На рис. 1 представлена зависимость значения первой частоты свободных колебаний оболочек эквивалентной массы от угла φ для различных значений параметра изменения толщины α при условии жесткого закрепления всех контуров (5). Аналогичные данные для условий жесткой заделки трех контуров и шарнирного опирания одного (6) приведены на рис. 2. Длина образующей у исследованных конических оболочек сохранялась постоянной $L = 0{,}4$ м, толщина менялась по закону (12), $h_0 = 0{,}002$ м.

На основании данных, приведенных на рисунках, можно проследить характер изменения первой частоты для различных значений параметра изменения толщины в окружном направлении при увеличении угла конусности. Граничные условия также существенно влияют на динамические характеристики конических оболочек. При жестком закреплении всех контуров при увеличении угла φ (уменьшении угла конусности) возрастают значения первой частоты свободных колебаний. При условиях жесткой заделки трех контуров и шарнирного опирания одного (6) зависимость обратная. При этом за счет незначительных изменений в геометрии поверхности оболочек можно добиваться увеличения (уменьшения) значений частот свободных колебаний.

1. *Григоренко Я. М., Мукоєд А. П.* Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ. – Київ: Либідь, 1992. – 152 с.
2. *Завьялов Ю. С., Квасов Ю. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
3. *Григоренко Я. М., Авраменко О. А.* Исследование напряженно-деформированного состояния замкнутых нетонких ортотропных конических оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 6. – С. 46–58.

4. *Григоренко Я. М., Яремченко С. Н.* Анализ влияния параметров ортотропии на перемещения и напряжения в нетонких цилиндрических оболочках с эллиптическим поперечным сечением // Там же. – 2007. – **43**, № 6. – С. 82–92.
5. *Григоренко А. Я., Яремченко Н. П.* О напряженно-деформированном состоянии прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины в уточненной постановке // Там же. – № 10. – С. 80–91.
6. *Будак В. Д., Григоренко А. Я., Пузырев С. В.* Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины // Там же. – № 4. – С. 89–98.
7. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.
8. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
9. *Прочность.* Устойчивость. Колебания. Справочник в 3-х томах / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 567 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 05.08.2008

A. Ya. Grigorenko, S. A. Maltsev

Solving the problems on free vibrations of conical shells with variable thickness

The paper considers free vibrations of thin isotropic conical shells with variable thickness basing on the method of spline-approximation of unknown functions. Calculations were carried out for different types of boundary conditions. The influence of a variable thickness of shells on free vibrations is studied. Free vibrations of shells with constant and variable thicknesses are compared.