ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2009

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 532.526

А. А. Авраменко

Вероятностный анализ неустойчивости вихревых структур в He II

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Б. И. Баском)

На основі формалізму рівняння Фоккера–Планка проведено ймовірнісний аналіз стійкості поодинокої вихорової нитки та вихорового кільця у надплинному гелії He II. *Одержано розподіли функції щільності вірогідності положення вихорових когерентних структур.*

Сверхтекучий гелий He II используется при криостатировании сверхпроводящих систем [1]. Степень охлаждения зависит от режима течения. При определенных условиях в потоках сверхтекучего гелия возникает так называемая сверхтекучая турбулентность, которая, в отличие от классической, представляет собой совокупность хаотически ориентированных когерентных структур — вихревых нитей и колец [2]. Для понимания механизма возникновения такого вида турбулентности и закономерностей ее развития важно знать динамику поведения указанных когерентных структур. В данной работе рассматривается вероятностный анализ поведения вихревой нити и вихревого кольца в He II.

Вихревая нить. Рассмотрим вихревую нить в цилиндрическом вращающемся сосуде с He II. Радиус сосуда — R и угловая скорость вращения — ω. Уравнение, описывающее диссипативное движение вихревой нити, смещенной от оси вращения, приведено в [3]. В безразмерной форме оно имеет следующий вид:

$$\frac{dr}{d\mathrm{Fo}} = -\left(\mathrm{Ro} - \frac{1}{1-r^2}\right)r, \tag{1}$$

где $r = \widetilde{r}/R$ — безразмерная радиальная координата вихревой нити; $\widetilde{r}$ — размерная радиальная координата вихревой нити; $\mathrm{Fo} = t\rho_s\varsigma_3/R^2$ — число Фурье; t — время; ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты; ς_3 — третий коэффициент второй вязкости [4]; $\mathrm{Ro} = \omega R^2/\gamma$ — число Россби; $\gamma = nh/m$ — квантованная циркуляция сверхтекучей компоненты скорости; n — целое число; h — постоянная Планка; m — масса молекулы He II.

В работе [3] уравнение (1) было рассмотрено для случая, когда вихревая нить расположена вблизи центра сосуда $r^2 \ll 1$. При этом уравнение (1) трансформируется к виду

$$\frac{dr}{d\mathrm{Fo}} = -(\mathrm{Ro} - 1)r. \tag{2}$$

Если в уравнение (2) добавить случайную гауссовскую силу $F_i(t)$

$$\begin{aligned} &\langle F_i(t) \rangle = 0, \\ &\langle F_i(t) F_j(t') \rangle = Q\delta(t - t'), \end{aligned} \tag{3}$$

то оно будет описывать стационарный гауссовский марковский процесс. В (3) параметр Q характеризует интенсивность флуктуационных сил, скобки $\langle \ldots \rangle$ означают осреднение, δ — дельта-функция Дирака. В этом случае модифицированное уравнение (2)

$$\frac{dr}{d\mathrm{Fo}} = -(\mathrm{Ro} - 1)r + F(\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}') \tag{4}$$

может быть исследовано на основе флуктуационно-диссипационной теоремы [5], которая позволяет определить плотность вероятности того, что вихревая нить находится в точке r. На основе этой теоремы было найдено, что эта плотность вероятности равна

$$P = P_0 \exp\left[-(\mathrm{Ro} - 1)\frac{r^2}{Q}\right], \tag{5}$$

где P_0 является нормирующим множителем. Отсюда видно, что наиболее вероятным положением вихревой нити при $\mathrm{Ro} > 1$ является центр сосуда. В этом случае вихревая нить будет двигаться к центру и остановится там, т. е. вихревая нить будет динамически устойчива. В случае же $\mathrm{Ro} < 1$ вихревая нить будет двигаться к стенке сосуда, и, следовательно, ее положение на оси вращения неустойчиво.

Результат (5) можно получить, не используя флуктуационно-диссипационную теорему, а основываясь на формализме уравнения Фоккера–Планка. Согласно сказанному, вероятность реализации определенного состояния системы, которая описывается уравнением Ланжевена

$$\frac{dr}{dt} = f(r) + F(t), \tag{6}$$

определяется уравнением Фоккера–Планка

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}[f(r)P(r,t)] + \frac{1}{2}Q\frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial r^2}. \tag{7}$$

Здесь $f(r)$ — нелинейная функция.

Если теперь построить стационарное решение уравнения (7) для уравнения (4), то сразу приходим к распределению (5). Определяя P_0 из условия нормировки

$$\int\limits_0^1 P(r)dr = 1, \tag{8}$$

находим, что

$$P_0 = 2\sqrt{\frac{\mathrm{Ro}-1}{\pi Q}}\mathrm{erf}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{Ro}-1}{Q}}\right).$$

Как видно, выражение для P_0 имеет смысл лишь при условии, что $\mathrm{Ro} > 1$. Это и понятно, так как задача рассматривалась при приближении малых r, а нормировка производилась по всему пространству. Для корректного анализа необходимо исследовать полное уравнение (1), трансформировав его в уравнение Ланжевена путем добавления в правую часть функции (3). Такое уравнение уже не описывает стационарный гауссовский марковский процесс (так как правая часть уравнения (1) нелинейная) и, следовательно, в данном случае не применима флуктуационно-диссипационная теорема. Однако, применив к уравнению Ланжевена формализм Фоккера — Планка, построим уравнение вида (7), стационарное решение которого есть

$$P = P_0(1-r^2)^{-1/Q}\exp\left[-\mathrm{Ro}\frac{r^2}{Q}\right], \tag{9}$$

где

$$P_0 = \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{Q}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1-\frac{1}{Q}\right){}_1\mathrm{F}_1\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}-\frac{1}{Q},-\frac{\mathrm{Ro}}{Q}\right)};$$

Γ — гамма функция; ${}_1F_1$ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция Куммера. При этом должно выполняться условие $Q > 1$. Анализ функции (9) показывает, что она имеет минимум в точке

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{\mathrm{Ro}-1}{\mathrm{Ro}}}.$$

Следовательно, при $\mathrm{Ro} \leqslant 1$ распределение (9) имеет монотонный характер с минимальным значением при $r = 0$ и максимальным при $r = 1$. Таким образом, при любом начальном положении вихревой нити ее состояние будет неустойчивым, и сама нить будет стремиться на периферию сосуда. При $\mathrm{Ro} > 1$ распределение (9) носит экстремальный характер, и наибольшая вероятность наблюдается в точках $r = 0$ и $r = 1$. Это означает, что вихревая нить будет дрейфовать к устойчивому состоянию ($r = 0$) или неустойчивому ($r = 1$) в зависимости от того, где она находилась в начальный момент — левее или правее точки минимума $r_{\min}$. Как видно, значение $r_{\min}$ (следовательно, и конфигурация функции плотности вероятности) не зависит от значения параметра Q, а определяется только значением числа Россби, т. е. соотношением угловой скорости нормальной компоненты и циркуляцией сверхтекучей компоненты. Полученные результаты показывают, что чем меньше указанное соотношение, тем неустойчивее вихревая нить. Следовательно, тем выше вероятность появления сверхтекучей турбулентности.

В диапазоне изменения параметра $Q \in [1, \infty]$ функция плотности вероятности (9) изменяется от нуля до единицы. При этом при определенных соотношениях координаты r и числа Россби функциональная зависимость $P = P(Q)$ может носить либо монотонный, либо экстремальный (с максимумом) характер. В [3] показано, что тепловые флуктуации могут вызывать гауссовскую силу (3), где

$$Q = \frac{k_B T}{\pi \gamma^2 \rho_s l},$$

k_B — постоянная Больцмана; T — температура; l — длина вихревой нити. Из условия $Q > 1$ следует, что при $\gamma = \mathrm{idem}$ вероятность неустойчивости возрастает с ростом температуры (что автоматически сопровождается уменьшением ρ_s). Это и понятно, так как рост температуры ведет к ухудшению условий, необходимых для сверхтекучести.

Вихревое кольцо. Уравнение для вихревого квантового кольца в сверхтекучем гелии имеет следующий вид [3]:

$$\frac{dr}{d\mathrm{Fo}} = -\frac{1}{4\pi r}\left[\ln\left(8\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{2}\right], \tag{10}$$

где $r = \tilde{r}/R$ — безразмерный радиус кольца; $\tilde{r}$ — радиус кольца; R — начальный радиус кольца; $a = \tilde{a}/R$ — безразмерный радиус тора кольца; a — радиус тора кольца. Уравнение (10) было решено в [3] при условии слабого изменения $\ln(r)$. Отсюда был сделан вывод, что со временем кольцо аннигилирует. Проанализируем вероятностное поведения вихревого кольца, преобразовав уравнение (10) в уравнение Ланжевена путем добавления в его правую часть гауссовской силы (3). Тогда, составив для (10) уравнение Фоккера–Планка (7) и получив его стационарное решение, найдем распределение плотности вероятности в следующем виде:

$$P = P_0 2^{-3\frac{1-\ln(8r/a)}{4\pi Q}} \left[\frac{r}{a}\right]^{\frac{1-\ln(8r/a)}{4\pi Q}}.$$

Анализ этого выражения показывает, что плотность вероятности имеет максимум в точке

$$r_{\max} = \frac{a\sqrt{e}}{8}.$$

Это значит, что если $r_{\max} > 1$, распределение плотности вероятности носит монотонный характер и наиболее вероятная ситуация при наличии случайной силы — кольцо не меняет своего размера (его радиус осциллирует около R). Если же $r_{\max} < 1$, функция плотности вероятности имеет максимум. При этом, чем меньше радиус тора кольца, тем меньше наиболее устойчивый радиус самого кольца. Кроме того, вид функции плотности вероятности показывает, что при $Q \to 0$ функция P стремится к дельта-функции вида $\delta(r - r_{\max})$, т. е. в этом случае наиболее вероятный размер кольца четко выражен. В противоположном случае ($Q \to \infty$) функция плотности вероятности стремится принять форму функции Хевисайда, т. е. все размеры колец являются равновероятными.

Как показывает анализ случайной силы, проведенный в [3], параметр Q при тепловых флуктуациях имеет следующую функциональную зависимость:

$$Q \sim \frac{k_B T}{\langle \tilde{r} \rangle},$$

т. е. параметр Q зависит от текущего радиуса вихревого кольца. Отсюда следует, что с повышением температуры и уменьшением начального радиуса кольца текущий радиус r может принимать любые значения в диапазоне от нуля до единицы. Если же температура уменьшается и увеличивается R, то радиус кольца стремится к размеру, определяемому выражением для $r_{\max}$.

Таким образом, в работе на основе вероятностного подхода проанализирован характер влияния различных факторов на неустойчивость вихревых нитей в He II. Это позволит лучше понять механизм возникновения и развития сверхтекучей турбулентности.

1. *Кондаурова Л. П., Немировский С. К.* Численное исследование эволюции интенсивных волн второго звука в турбулентном сверхтекучем гелии // Теплофизика и аэромеханика. – 2008. – **15**, № 2. – С. 237–246.
2. *Vinen W. F.* Mutual friction in a heat current in liquid helium II. Theory of mutual friction // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1957. – **242**. – P. 493–515.
3. *Паттерман С.* Гидродинамика сверхтекучей жидкости. – Москва: Мир, 1978. – 520 с.
4. *Халатников И. М.* Теория сверхтекучести. – Москва: Наука, 1971. – 320 с.
5. *Fox R. F., Uhlenbeck G. E.* Contributions to non-equilibrium thermodynamics. I. Theory of hydrodynamical fluctuations // Physics of Fluids. – 1970. – **13**. – P. 1893–1902.

Институт технической теплофизики
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 22.10.2008

A. A. Avramenko

Probability analysis of vortex structures instability in He II

Probability analysis of the stability of a single vortical string and a vortical ring in superfluid helium HeII *is carried out. The analysis is carried out within the Fokker–Planck equation formalism. Distributions of the probability density function for a position of vortex coherent structures are obtained.*