Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:519.46

А. Ф. Баранник, Т. А. Баранник, І. І. Юрик

Узагальнена процедура відокремлення змінних

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

На прикладі рівняння теплопровідності запропоновано узагальнену процедуру відокремлення змінних.

Одним з ефективних методів побудови точних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних є метод відокремлення змінних. Так, добре відомими розв'язками рівняння теплопровідності

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

є розв'язки з відокремленими змінними [1]:

$$u(x,t) = \begin{cases} ke^{\lambda t}\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}x + \delta), & \lambda > 0, \\ kx + \widetilde{k}, & \lambda = 0, \\ ke^{\lambda t}\cos(\sqrt{|\lambda|}x + \delta), & \lambda < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Розв'язки (2) можна отримати, використовуючи підстановку

$$u = a(x)b(t), \tag{3}$$

яку можна розглядати також як анзац, який редукує рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $a = a(x)$ (або з невідомою функцією $b = b(t)$).

У даній роботі ми розглядаємо на прикладі рівняння (1) таке узагальнення анзацу (3):

$$u = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t)a_i(x), \qquad m \geqslant 1. \tag{4}$$

Анзац (4) містить m невідомих функцій $a_i(x)$ і m невідомих функцій $\omega_i(t)$, які будемо визначати з умови, що анзац (4) редукує рівняння (1) до системи m звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $\omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$. Питання про знаходження цієї системи буде розглянуто в п. 1.

1. Редукція рівняння (1) до системи звичайних диференціальних рівнянь. З'ясуємо перш за все, в якому випадку анзаци типу (4) визначають один і той же розв'язок рівняння (1). Вважатимемо, що функції $a_1, \ldots, a_m$, які входять до анзацу (4), є лінійно незалежними над полем дійсних чисел R. Тоді анзацу (4) відповідає m-вимірний векторний простір $V = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ над R з базисом $a_1, \ldots, a_m$. Можна сказати, що анзац (4) представлений в базисі $a_1, \ldots, a_m$. Нехай $b_1(x), \ldots, b_m(x)$ є яким-небудь іншим базисом простору V і T — матриця переходу від базису $a_1, \ldots, a_m$ до базису $b_1, \ldots, b_m$. Тоді

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Функція u, визначена формулою (4), не зміниться, якщо одночасно виконати перетворення над функціями $\omega_1, \ldots, \omega_m$ згідно з формулою

$$(\widehat{\omega}_1, \ldots, \widehat{\omega}_m) = (\omega_1, \ldots, \omega_m) T^{-1}. \tag{6}$$

У результаті отримуємо анзац

$$u = \sum_{i=1}^{m} \widehat{\omega}_i(t) b_i(x), \tag{7}$$

де функції b_i і $\widehat{\omega}_i$ визначаються за формулами (5) і (6). Очевидно, анзац (7) представляє ту саму функцію u, але в іншому базисі $b_1, \ldots, b_m$ простору V. У зв'язку з цим два анзаци (4) і (7) вважаємо еквівалентними, якщо існує таке невироджене перетворення T простору V, що визначається формулами (5) і (6), яке переводить анзац (4) в анзац (7).

Розглянемо далі питання про редукцію рівняння (1). Підставивши (4) в (1), отримаємо рівняння

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i' a_i - \sum_{i=1}^{m} \omega_i a_i'' = 0. \tag{8}$$

Припустимо, що функції a_i'' належать до простору V для $i = 1, \ldots, m$. Це означає, що існує така квадратна матриця A над R порядку m, для якої

$$\begin{pmatrix} a_1'' \\ \vdots \\ a_m'' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Отже, анзацу (4), (9) відповідає квадратна матриця A порядку m. З (5) і (9) випливає, що

$$\begin{pmatrix} b_1'' \\ \vdots \\ b_m'' \end{pmatrix} = TAT^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

а тому в базисі $b_1, \ldots, b_m$ анзацу (4) відповідає матриця TAT^{-1}. Отримуємо, що матриці A і TAT^{-1} даного анзацу відповідно в базисах $a_1, \ldots, a_m$ і $b_1, \ldots, b_m$ простору V є подібними. У результаті класифікація всіх анзаців виду (4) зводиться до класифікації всіх квадратних матриць A порядку m над R з точністю до подібності. Залежно від коренів характеристичного рівняння матриця A подібна до однієї з трьох канонічних форм [2].

1. Корені характеристичного рівняння матриці A дійсні. Матриця A в цьому випадку подібна до матриці

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{m_1,\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{m_s,\lambda_s}} \end{pmatrix},$$

де J_{m_i,λ_i} є кліткою Жордана порядку m_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$:

$$J_{m_i,\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_i & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}. \tag{10}$$

2. Корені характеристичного рівняння матриці A комплексні. Матриця A у цьому випадку подібна до матриці

$$\begin{pmatrix} \boxed{J^{m_1}_{b_1,d_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J^{m_k}_{b_k,d_s}} \end{pmatrix}, \qquad d_i \neq 0 \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, \ldots, k,$$

де $J^m_{b,d}$ — узагальнена клітка Жордана, тобто матриця порядку $2m$ такого вигляду:

$$J^m_{b,d} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b & -d \\ d & b \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} b & -d \\ d & b \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{\begin{matrix} b & -d \\ d & b \end{matrix}} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Якщо $m = 1$, то

$$J^1_{b,d} = \begin{pmatrix} b_1 & -d_1 \\ d_1 & b_1 \end{pmatrix}.$$

3. Характеристичне рівняння матриці A має як дійсні, так і комплексні корені. Матриця A у даному випадку подібна до матриці, яка є сумою кліток Жордана виду (10) і узагальнених кліток Жордана виду (11).

Отже, можна вважати, що матриця A у рівності (9) має одну з трьох канонічних форм. Виконання рівності (9) означає, що рівняння (8) можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \Phi_i(\omega_1, \ldots, \omega_m, \omega_1', \ldots, \omega_m') = 0, \tag{12}$$

де функції Φ_i залежать тільки від змінної t, а функції a_i — тільки від змінної x. Оскільки функції $a_1, \ldots, a_m$ лінійно незалежні над R, то рівняння (12) розпадається на систему m звичайних диференціальних рівнянь

$$\Phi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_m = 0. \tag{13}$$

Задача побудови розв'язків виду (4) рівняння (1) зведена до інтегрування двох систем звичайних диференціальних рівнянь (9) і (13). Необхідно зауважити, що якщо матриця A є сумою s кліток Жордана, то відповідний розв'язок рівняння (1) є сумою s розв'язків цього рівняння, які відповідають даним кліткам. Тому можна обмежитись випадком, коли матриця A є кліткою Жордана виду (10), або узагальненою кліткою Жордана виду (11).

2. Точні розв'язки рівняння (1). Випадок матриці (10). Нехай A є кліткою Жордана $J_{m,\lambda}$. Для побудови точних розв'язків рівняння (1) використаємо анзац (4), в якому функції a_i задовольняють систему рівнянь

$$a_1'' = \lambda a_1 + a_2, \qquad \ldots, \qquad a_{m-1}'' = \lambda a_{m-1} + a_m, \qquad a_m'' = \lambda a_m. \tag{14}$$

Підставивши (14) у (8) і використавши лінійну незалежність функцій a_i, отримаємо систему для визначення функцій ω_i:

$$\omega_1' = \lambda\omega_1, \qquad \omega_2' = \omega_1 + \lambda\omega_2, \qquad \ldots, \qquad \omega_m' = \omega_{m-1} + \lambda\omega_m. \tag{15}$$

Можливі три випадки.

1. Випадок $\lambda > 0$. Розв'язок системи (14):

$$a_{m-k} = f_k(x)e^{\sqrt{\lambda}x} + g_k(x)e^{-\sqrt{\lambda}x}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{16}$$

$f_k(x)$ і $g_k(x)$ — многочлени над R степеня, що менший або дорівнює k, які задовольняють рекурентні співвідношення

$$f_k'' + 2\sqrt{\lambda}f_k' - f_{k-1} = 0, \qquad f_0 = C_1 \text{ — стала},$$

$$g_k'' - 2\sqrt{\lambda}g_k' - g_{k-1} = 0, \qquad g_0 = C_2 \text{ — стала}.$$

Розв'язок системи (15) має вигляд

$$\omega_k = h_{k-1}(t)e^{\lambda t}, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{17}$$

$h_k(t)$ — многочлен над R степеня, що менший або дорівнює k, який задовольняє рекурентне співвідношення

$$h_k' = h_{k-1}, \qquad h_0 = B_1 \text{ — стала}. \tag{18}$$

На підставі (4), (16) і (17) розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} (f_k(x)e^{\sqrt{\lambda}x} + g_k(x)e^{-\sqrt{\lambda}x})h_{m-k-1}(t)e^{\lambda t}.$$

2. Випадок $\lambda < 0$. Розв'язок системи (14):

$$a_{m-k} = f_k(x)\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + g_k(x)\sin(\sqrt{|\lambda|}x), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{19}$$

$f_k(x)$, $g_k(x)$ — многочлени над R степеня, що менший або дорівнює k, які задовольняють рекурентні співвідношення

$$f_k'' - 4\lambda f_k' - f_{k-1}' + 2\sqrt{|\lambda|}g_{k-1} = 0, \qquad f_0 = C_1 \text{ — стала},$$

$$g_k'' - 4\lambda g_k' - g_{k-1}' - 2\sqrt{|\lambda|}f_{k-1} = 0, \qquad g_0 = C_2 \text{ — стала}.$$

На підставі (4), (17) і (19) розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} (f_k(x)\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + g_k(x)\sin(\sqrt{|\lambda|}x))h_{m-k-1}(t)e^{\lambda t},$$

де многочлен $h_k(t)$ задовольняє рекурентне співвідношення (18).

3. Випадок $\lambda = 0$. Системи (14), (15) набувають вигляду

$$a_1'' = a_2, \qquad \ldots, \qquad a_{m-1}'' = a_m, \qquad a_m'' = 0, \tag{20}$$

$$\omega_1' = 0, \qquad \omega_2' = \omega_1, \qquad \ldots, \qquad \omega_m' = \omega_{m-1}. \tag{21}$$

Розв'язок системи (20):

$$a_{m-k} = f_{2k+1}(x), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{22}$$

$f_{2k+1}(x)$ — многочлен над R степеня, що менший або дорівнює $2k+1$, який задовольняє рекурентне співвідношення

$$f_{2k+1}'' = f_{2k-1}, \qquad f_1 = C_1x_1 + C_2, \qquad C_1, C_2 \text{ — довільні сталі}.$$

Розв'язок системи (21):

$$\omega_k = h_{k-1}(t), \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{23}$$

$h_k(t)$ — многочлен над R степеня, що менший або дорівнює k, який задовольняє рекурентне співвідношення

$$h_k' = h_{k-1}, \qquad h_0 = B_1.$$

На підставі (4), (22) і (23) розв'язком рівняння (1) є функція

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} f_{2k+1}(x)h_{m-k-1}(t). \tag{24}$$

Формула (24) визначає відомі многочлени теплопровідності [3], які є інваріантними розв'язками рівняння (1).

3. Точні розв'язки рівняння (1). Випадок матриці (11). Нехай матриця A, що відповідає анзацу (4), належить до типу (11). Для зручності анзац (4) запишемо у вигляді

$$u = \sum_{k=1}^{m} \Big[\omega_1^{(k)}(t) a_1^{(k)}(x) + \omega_2^{(k)}(t) a_2^{(k)}(x)\Big], \tag{25}$$

де функції $a_1^{(k)}$ і $a_2^{(k)}$ задовольняють таку систему рівнянь:

$$a_1^{(k)''} = b a_1^{(k)} + d a_2^{(k)} + a_1^{(k-1)}, \tag{26}$$

$$a_2^{(k)''} = -d a_1^{(k)} + b a_2^{(k)} + a_2^{(k-1)}, \tag{27}$$

$k = 1, \ldots, m$, $a_1^{(0)} = 0$, $a_2^{(0)} = 0$.

Розглянемо випадок $m = 1$. Система (26), (27) має вигляд

$$a_1^{(1)''} = b a_1^{(1)} + d a_2^{(1)}, \qquad a_2^{(1)''} = -d a_1^{(1)} + b a_2^{(1)}. \tag{28}$$

Характеристичне рівняння, що відповідає системі (28), має вигляд

$$s^4 - 2bs^2 + b^2 + d^2 = 0. \tag{29}$$

Оскільки $d \neq 0$, то рівняння (29) має чотири різні корені:

$$s_1 = \sigma + i\tau, \qquad s_2 = \sigma - i\tau, \qquad s_3 = -\sigma - i\tau, \qquad s_4 = -\sigma + i\tau,$$

де $s_1^2 = b + id$. Розв'язок системи (28):

$$a_1^{(1)} = e^{\sigma x}\big(C_1^{(1)} \cos(\tau x) - C_2^{(1)} \sin(\tau x)\big) + e^{-\sigma x}\big(C_3^{(1)} \cos(\tau x) - C_4^{(1)} \sin(\tau x)\big), \tag{30}$$

$$a_2^{(1)} = e^{\sigma x}\big(-C_1^{(1)} \sin(\tau x) - C_2^{(1)} \cos(\tau x)\big) + e^{-\sigma x}\big(C_3^{(1)} \sin(\tau x) + C_4^{(1)} \cos(\tau x)\big), \tag{31}$$

де $C_i^{(1)}$ — довільні сталі, $i = 1, 2, 3, 4$.

Підставивши (28) у (25), а далі (25) в (1), отримаємо редуковану систему рівнянь для визначення функцій $\omega_1^{(1)}$ і $\omega_2^{(1)}$:

$$\omega_1^{(1)'} = b\omega_1^{(1)} - d\omega_2^{(1)}, \qquad \omega_2^{(1)'} = d\omega_1^{(1)} + b\omega_2^{(1)}. \tag{32}$$

Розв'язок системи (32):

$$\omega_1^{(1)} = e^{bt}\big(-B_1^{(1)} \sin(dt) - B_2^{(1)} \cos(dt)\big), \tag{33}$$

$$\omega_2^{(1)} = e^{bt}\big(-B_2^{(1)} \sin(dt) + B_1^{(1)} \cos(dt)\big), \tag{34}$$

$B_i^{(1)}$ — довільні сталі, $i = 1, 2$. Підставивши (30), (31), (33), (34) в анзац (25) для $m = 1$, після нескладних перетворень отримаємо розв'язок рівняння (1):

$$u = e^{\sigma x + bt}\Big[\big(-B_1^{(1)} C_1^{(1)} + B_2^{(1)} C_2^{(1)}\big) \sin(\tau x + dt) - \big(B_1^{(1)} C_2^{(1)} + B_2^{(1)} C_1^{(1)}\big) \cos(\tau x + dt)\Big] +$$
$$+ e^{-\sigma x + bt}\Big[\big(B_1^{(1)} C_3^{(1)} + B_2^{(1)} C_4^{(1)}\big) \sin(\tau x - dt) + \big(B_1^{(1)} C_4^{(1)} - B_2^{(1)} C_3^{(1)}\big) \cos(\tau x - dt)\Big].$$

Для випадку $m > 1$ розв'язок вигляду (25) рівняння (1) внаслідок громіздкості виписувати не будемо.

1. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.
2. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. – Москва: Наука, 1970. – С. 171–178.
3. *Widder D. V.* The heat equation. – New York: Acad. Press, 1975.

Національний університет харчових технологій, Київ

Надійшло до редакції 14.11.2008

A. F. Barannyk, T. A. Barannyk, I. I. Yuryk

The generalized procedure of separation of variables

The generalized procedure of the separation of variables is proposed by the example of the heat equation.