УДК 517.5

Д. А. Зарайский

Об аппроксимации функций с нулевыми шаровыми средними линейными комбинациями собственных функций оператора Лапласа

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Доведено, що спеціальні лінійні комбінації бессельових функцій щільні в C^∞-топології в просторі функцій з нульовими інтегралами за кулями фіксованого радіуса в довільній відкритій області $U \subset \mathbb{R}^n$. Одержано узагальнення цього результату для розв'язання деяких рівнянь згортки вигляду $f * T = 0$, T — радіально. Розглянуто аналогічні результати для симетричних просторів рангу 1.

Пусть B_R — открытый шар радиуса R в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат, $B_{R_1,R_2} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon R_1 < |x| < R_2\}$, $\overline{B}_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| \leqslant R\}$; (ρ, σ) — полярные координаты в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\rho(x) = |x|$, $\sigma(x) = x/|x|$. Обозначим $\mathcal{D}'(U)$ — пространство распределений на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, снабженное $*$-слабой топологией, $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ — пространство радиальных (т. е. инвариантных относительно вращений) распределений на $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями. Для $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ пусть $r(T)$ — радиус наименьшего замкнутого шара $\overline{B}_r(0)$, $r \geqslant 0$, содержащего $\operatorname{supp} T$. Для открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ положим $\mathcal{D}'_T(U) = \{f \in \mathcal{D}'(U) \colon f * T = 0 \text{ на } U_{r(T)}\}$, $C^\infty_T(U) = \{f \in C^\infty(U) \colon f * T = 0 \text{ на } U_{r(T)}\}$, где $U_r = \{x \in U \colon \overline{B}_r(x) \subset U\}$ (очевидно, U_r открыто), $f * g$ — свертка f и g; область определения $f * T$ содержит $U_{r(T)}$, но не обязательно совпадает с ним. Если $T = \chi_{B_r}$ — индикатор шара, обозначим $C^\infty_T(U)$ через $V^\infty_r(U)$; тогда $V^\infty_r(U)$ будет множеством функций из $C^\infty(U)$ с нулевыми интегралами по замкнутым шарам радиуса r, лежащим в U.

Пусть $\{Y_j^{(k)}(\sigma)\}_{j=1}^{d_k}$ — некоторый ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_k$ сферических гармоник степени k на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ (см., напр., [1, § 1.5.1]). Следуя [1], обозначим при $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\eta \in \mathbb{Z}_+$

$$\Phi_{z,\eta,k,j}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\eta \frac{J_{n/2+k-1}(z\rho)}{(z\rho)^{n/2-1}} Y_j^{(k)}(\sigma),$$

$$\Psi_{z,\eta,k,j}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\eta \frac{N_{n/2+k-1}(z\rho)}{(z\rho)^{n/2-1}} Y_j^{(k)}(\sigma),$$

где J_λ, N_λ — функции Бесселя первого и второго рода [2], и при $\eta \in \mathbb{Z}_+$

$$\Phi_{0,\eta,k,j}(x) = \rho^{k+2\eta} Y_j^{(k)}(\sigma),$$

$$\Psi_{0,\eta,k,j}(x) = \begin{cases} \rho^{2\eta-n-k+2} Y_j^{(k)}(\sigma), & \text{если } n \text{ нечётно или } 2\eta < 2k + n - 2, \\ (\rho^{2\eta-n-k+2} \ln \rho) Y_j^{(k)}(\sigma), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $(\Delta + \lambda^2)^{\eta+1} \Phi_{\lambda,\eta,k,j} = 0$ на $\mathbb{R}^n$ и $(\Delta + \lambda^2)^{\eta+1} \Psi_{\lambda,\eta,k,j} = 0$ на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (см. [1]), Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$.

Сферическое преобразование распределения $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством $\widetilde{T}(z) = \widehat{T}(z\mathbf{e}) = \langle T, e^{-iz(\cdot,\mathbf{e})}\rangle$, $\widehat{T}$ — преобразование Фурье–Лапласа T, $\mathbf{e}$ — единичный вектор в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $n_\lambda(\widetilde{T})$ — кратность нуля λ функции $\widetilde{T}$, и

$$n(\lambda, T) = n_\lambda(\widetilde{T}) - 1 \qquad \text{при} \qquad \lambda \neq 0, \qquad n(0,T) = \frac{n_0(\widetilde{T})}{2} - 1. \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{Z}(u)$ — множество нулей функции u, лежащих в $[0,+\infty) \bigcup \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}\lambda > 0\}$. Обозначим, следуя [1], $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ — класс распределений $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$, $T \neq 0$, таких, что для $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$ выполнены неравенства

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \gamma_1 \ln(2 + |\lambda|), \qquad |\widetilde{T}^{(n_\lambda(\widetilde{T}))}(\lambda)| \geqslant (2 + |\lambda|)^{n_\lambda(\widetilde{T}) - \gamma_2} \tag{2}$$

с положительными константами γ_1, γ_2, не зависящими от λ. Класс $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ содержится в классе обратимых распределений, т. е. любое распределение $T \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ имеет фундаментальное решение E, $E * T = \delta_0$, δ_0 — дельта-функция Дирака. Класс $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ достаточно широк [1, § 3.2.1], он содержит, в частности, индикатор шара χ_{B_r}.

Если $T \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant \infty$, $R_2 - R_1 > r(T)$, $f \in C^\infty(B_{R_1,R_2})$, и $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{d_k} f_{k,j}(\rho) Y_j^{(k)}(\sigma)$ — ряд Фурье по сферическим гармоникам функции f, то f принадлежит $C_T^\infty(B_{R_1,R_2})$ тогда и только тогда [1, теорема 3.2.6], когда

$$f_{k,j}(\rho) Y_j^{(k)}(\sigma) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})} \sum_{\eta=0}^{n(\lambda,T)} (\alpha_{\lambda,\eta,k,j} \Phi_{\lambda,\eta,k,j} + \beta_{\lambda,\eta,k,j} \Psi_{\lambda,\eta,k,j}), \tag{3}$$

и аналогичное утверждение имеет место для функций на B_R, $R > r(T)$, где в разложении (3) присутствуют только члены с $\Phi_{\lambda,\eta,k,j}$ [1, теорема 3.2.3]. Таким образом, при $T \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ для семейств

$$\Phi_T = \{\Phi_{\lambda,\eta,k,j}\}, \qquad \Psi_T = \{\Psi_{\lambda,\eta,k,j}\},$$

где λ пробегает множество $\mathcal{Z}(\widetilde{T})$, $\eta = 0, \ldots, n(\lambda, T)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, d_k$, имеем

$$\Phi_T \subset C_T^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \operatorname{span}_{C^\infty(B_R)} \Phi_T = C_T^\infty(B_R), \qquad \forall R > r(T), \tag{4}$$

$$\Psi_T \subset C_T^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \qquad \operatorname{span}_{C^\infty(B_{\varepsilon,\infty})}(\Phi_T \textstyle\bigcup \Psi_T) = C_T^\infty(B_{\varepsilon,\infty}), \qquad \forall \varepsilon > 0, \tag{5}$$

через $\operatorname{span}_{C^\infty(U)}$ обозначена замкнутая линейная оболочка в $C^\infty(U)$.

Если U выпукло, то из аппроксимационной теоремы [3, теорема 16.4.1] следует, что $\operatorname{span}_{C^\infty(U)} \Phi_T = C_T^\infty(U)$ (см. [1, § 2.4]). В связи с этим в [1] для случая, когда $T = \chi_{B_r}$ — индикатор шара, поставлены следующие вопросы (problems 4.6–4.8):

1. Для каких областей $U \subset \mathbb{R}^n$ множество линейных комбинаций функций

$$\Phi_{1,0,k,l}\left(\frac{\nu_m x}{r}\right), \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \qquad l = 1, \ldots, d_k, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где ν_m, $m \in \mathbb{N}$, — положительные корни $J_{n/2}$, плотно в $V_r^\infty(U)$ в C^∞-топологии?

2. Пусть $r > 0$, $R_2 - 2r > R_1 > 0$, $\nu > 0$ — ноль функции $J_{n/2}$. Верно ли тогда, что функция $N_{(n-2)/2}(\nu|x|/r)$ является пределом в $C^\infty(B_{R_1,R_2})$ последовательности линейных комбинаций функций (6)?

3. Для каких областей $U \subset \mathbb{R}^n$ множество линейных комбинаций функций

$$\begin{aligned}&c_1\Phi_{1,0,k,l}\left(\frac{\nu_m x}{r}\right) + c_2\Psi_{1,0,k,l}\left(\frac{\nu_m(x-h)}{r}\right),\\ &k \in \mathbb{Z}_+, \qquad l = 1,\dots,d_k, \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \qquad h \in \mathbb{R}^n \setminus U,\end{aligned} \tag{7}$$

плотно в $V_r^\infty(U)$ в C^∞-топологии?

По теореме 1 настоящей работы (см. ниже) линейные комбинации функций (7) плотны в $V_r^\infty(U)$ для произвольной области U. Если дополнение U связно, то также и линейные комбинации функций вида (6) плотны в $V_r^\infty(U)$. Теорема 2 дает примеры областей U, для которых линейные комбинации функций (6) не плотны в $V_r^\infty(U)$, и отрицательный ответ на второй вопрос.

1. Случай евклидова пространства. Для $a \in \mathbb{R}^n$ положим $\tau_a f = f(\cdot - a)$, $\Psi_{T,a} = \tau_a\Psi_T = \{f(\cdot - a)\colon f \in \Psi_T\}$. Имеет место следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $T \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$, $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $A \subset \mathbb{R}^n \setminus U$ — множество, пересекающееся с каждой ограниченной компонентой связности $\mathbb{R}^n \setminus U$. Тогда*

$$\mathrm{span}_{C^\infty(U)}\left(\Phi_T \bigcup \bigcup_{a\in A} \Psi_{T,a}\right) = C_T^\infty(U),$$

т. е. линейные комбинации функций $\Psi_{\lambda,\eta,k,j}(\cdot - a)$ и $\Phi_{\lambda,\eta,k,j}(\cdot)$, $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, $0 \leqslant \eta \leqslant n(\lambda, T)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant j \leqslant d_k$, $a \in A$, плотны в множестве $C_T^\infty(U)$ в топологии пространства $C^\infty(U)$.

Заметим, что теорема 1 остается в силе для любых семейств Φ_T, Ψ_T, удовлетворяющих (4), (5), и распределения $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$, имеющего фундаментальное решение.

Доказательство теоремы 1 использует идею доказательства теоремы Рунге для дифференциального оператора [3, теорема 4.4.5], при этом вместо теоремы единственности для вещественно-аналитических функций применяется теорема единственности для решений уравнения свертки вида $f * T = 0$, $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ [1, теорема 3.2.1].

Теорема 2. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$, $T \neq 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, V — объединение U и некоторого семейства ограниченных компонент связности множества $\mathbb{R}^n \setminus U_{r(T)}$ (очевидно, V открыто). Тогда:*

(i) если T имеет фундаментальное решение E, $E * T = \delta_0$, и $f \in \mathcal{D}'(U)$ аппроксимируется в $*$-слабой топологии пространства $\mathcal{D}'(U)$ распределениями из $\mathcal{D}'_T(V)$, то и само f продолжается до распределения из $\mathcal{D}'_T(V)$, причем единственным образом;

(ii) если $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, Ψ_λ — решение уравнения $(\Delta + \lambda^2)^{n(\lambda,T)+1} f = 0$ на U, не продолжающееся до решения этого уравнения на V, то Ψ_λ не лежит в замкнутой линейной оболочке в $\mathcal{D}'(U)$ ограничений на U функций из $\mathcal{D}'_T(V)$ и решений уравнений $(\Delta + \mu^2)^{n(\mu,T)+1} f = 0$ на U, $\mu \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}) \setminus \{\lambda\}$.

2. Случай некомпактного симметрического пространства ранга один. Здесь обозначим $X = G/K$ — симметрическое пространство некомпактного типа ранга один, $o = eK \in X$ — отмеченная точка. Пусть $\mathcal{E}'_\natural(X)$ — пространство инвариантных относительно K распределений на X с компактными носителями. Для открытого множества $U \subset X$

обозначим $f \times T$ свертку распределений $f \in \mathcal{D}'(U)$ и $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(X)$, $\mathcal{D}'_T(U)$ — множество $f \in \mathcal{D}'(U)$ таких, что $f \times T = 0$ на $U_{r(T)}$, где $r(T)$ и U_r определяются так же, как и в евклидовом случае, $C^{\infty}_T(U) = \mathcal{D}'_T(U) \bigcap C^{\infty}(U)$. Пусть $G = KAN$ — разложение Ивасавы, M — централизатор A в K, $\widehat{K}_M$ — множество представлений δ группы K таких, что существует инвариантный относительно группы $M \subset K$ ненулевой вектор. Множество $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ комплексных линейных функционалов на алгебре Ли $\mathfrak{a}$ группы A посредством формы Киллинга стандартным образом отождествляется с $\mathbb{C}$, пусть $\rho \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ — полусумма положительных корней с учетом кратности [4, гл. I]. При $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(X)$ обозначим через $\widetilde{T}(\lambda)$ сферическое преобразование распределения T, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ [4, гл. IV]. Аналогично евклидову случаю, пусть $\mathfrak{N}(X)$ — множество распределений $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(X)$, $T \neq 0$, для которых выполнено (2), и $n(\lambda, T)$ определим формулой (1). При $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{Z}_+$, $\delta \in \widehat{K}_M$, $j = 1, \ldots, d(\delta)$ можно определить функции $\Phi_{\lambda,\eta,\delta,j} \in C^{\infty}(X)$, $\Psi_{\lambda,\eta,\delta,j} \in C^{\infty}(X \setminus \{o\})$ такие, что при $T \in \mathfrak{N}(X)$ для семейств $\Phi_T = \{\Phi_{\lambda,\eta,\delta,j}\}$, $\Psi_T = \{\Psi_{\lambda,\eta,\delta,j}\}$, где λ пробегает множество $\mathcal{Z}(\widetilde{T})$, $0 \leqslant \eta \leqslant n(\lambda, T)$, $\delta \in \widehat{K}_M$, $1 \leqslant j \leqslant d(\delta)$, выполнены аналоги соотношений (4), (5) (см. [5, ч. 2]). Для $a \in G$ положим $\tau_a f = f(a^{-1}\cdot)$, $\Psi_{T,a} = \tau_a \Psi_T = \{f(a^{-1}\cdot)\colon f \in \Psi_T\}$.

Теорема 3. *Пусть $T \in \mathfrak{N}(X)$, $U \subset X$ открыто, $A \subset G$ — множество такое, что $A \cdot o \subset \subset X \setminus U$, и $A \cdot o$ пересекается с каждой компактной компонентой связности множества $X \setminus U$. Тогда*

$$\operatorname{span}_{C^{\infty}(U)} \left(\Phi_T \bigcup \bigcup_{a \in A} \Psi_{T,a} \right) = C^{\infty}_T(U).$$

Теорема 4. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(X)$, $T \neq 0$, $U \subset X$ открыто, V — объединение U и некоторого семейства компактных компонент связности множества $X \setminus U_{r(T)}$. Тогда:*

(i) если T обладает фундаментальным решением $E \in \mathcal{D}'(X)$, $E \times T = \delta_o$, и $f \in \mathcal{D}'(U)$ аппроксимируется в $*$-слабой топологии $\mathcal{D}'(U)$ распределениями из $\mathcal{D}'_T(V)$, то и само f единственным образом продолжается до распределения из $\mathcal{D}'_T(V)$;

(ii) пусть L — оператор Лапласа–Бельтрами на X. Если $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, Ψ_λ — решение уравнения $(L + |\rho|^2 + \lambda^2)^{n(\lambda,T)+1} f = 0$ на U, не продолжающееся до его решения на V, то Ψ_λ не лежит в замкнутой линейной оболочке в $\mathcal{D}'(U)$ ограничений на U функций из $\mathcal{D}'_T(V)$ и решений уравнений $(L + |\rho|^2 + \mu^2)^{n(\mu,T)+1} f = 0$ на U, $\mu \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}) \setminus \{\lambda\}$.

3. Случай компактного симметрического пространства ранга один. Аналогичные результаты имеют место для симметрического пространства $X = G/K$ компактного типа ранга один. Будем считать, что диаметр X равен $\pi/2$. Пусть o — отмеченная точка, инвариантная относительно действия группы K, $\operatorname{Ant} o = \{x \in X\colon \operatorname{dist}_X(x, o) = \pi/2\}$ — антиподальное многообразие. Следуя [5, ч. 3], обозначим $\mathfrak{X} = X \setminus \operatorname{Ant} o$ и отождествим $\mathfrak{X}$ с $\mathbb{R}^{a_X}$ со специальным образом заданной римановой метрикой, явный вид метрики см. в [5]. При этом отождествлении o соответствует начало координат и $\operatorname{dist}_X(x, o) = \operatorname{arctg}|x|$, $x \in \mathfrak{X}$. Для $x \in \mathfrak{X} \setminus \{o\}$ обозначим $\varrho(x) = |x| = \operatorname{tg}\operatorname{dist}_X(x, o)$, $\sigma(x) = x/|x|$. Далее, $\mathcal{E}'_{\natural}(\mathfrak{X})$ — пространство инвариантных относительно K распределений на X с носителями, содержащимися в $\mathfrak{X}$, $\widetilde{T}$ — сферическое преобразование $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathfrak{X})$ [5]. Если $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathfrak{X})$, то $n(\lambda, T)$, $r(T)$, а также U_r, $C^{\infty}_T(U)$ и $\mathcal{D}'_T(U)$ для открытого $U \subset X$ определяются таким же образом, как и в евклидовом и некомпактном случаях. При определении фундаментального решения E распределения $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathfrak{X})$, $E \times T = \delta_o$, мы предполагаем, что E определено на всем X, включая антиподальное многообразие, т. е. $|\widetilde{T}(\rho_X + 2l)| \geqslant C(l+1)^{-\gamma}$ для некоторых $C > 0$, $\gamma > 0$, не зависящих от $l \in \mathbb{Z}_+$, где $\rho_X = n - 1$, если $X = \mathbb{S}^n$, $\rho_X = (n-1)/2$, если $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$,

$\rho_X = n$, если $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $\rho_X = 2n+1$, если $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{H}}$, и $\rho_X = 11$, если $X = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}a}$. Пространство сферических гармоник степени $k \in \mathbb{Z}_+$ на единичной сфере в $\mathbb{R}^{a_X}$ распадается в сумму пространств $\mathcal{H}^{k,m}$, $m = 0, \ldots, M_X(k)$ (см. [5]), пусть $\{Y_j^{k,m}(\sigma)\}_{j=1}^{d_X^{k,m}}$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{k,m}$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{Z}_+$ можно определить гладкие на $\mathfrak{X}$ функции $\Phi_{\lambda,\eta,k,m,j}(x) = \Phi_{\lambda,\eta,k,m}(\varrho(x))Y_j^{k,m}(\sigma(x))$ (см. [5]). При $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathfrak{X})$, $T \neq 0$, обозначим Φ_T семейство $\{\Phi_{\lambda,\eta,k,m,j}\}$, где $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, $\eta = 0, \ldots, n(\lambda, T)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m = 0, \ldots, M_X(k)$, $j = 1, \ldots, d_X^{k,m}$.

Построенные в [5] функции $\Psi_{\lambda,\eta,k,m,j} \in C^\infty(\mathfrak{X} \setminus \{o\})$, вообще говоря, не продолжаются гладким образом на $X \setminus \{o\}$. Если $X \neq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, то для $z \in \mathbb{C}$, как и в [5] при определении функций $\Phi_{\lambda,\eta,k,m,j}$, обозначим $A = (\rho_X + z)/2 + k - m$, $B = (\rho_X - z)/2 + k - m$, $C = k + a_X/2$. Положим при $X \neq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ для η, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \ldots, M_X(k)\}$, $\varrho \in (0, \infty)$

$$\Xi_{z,\eta,k,m}(\varrho) = \left(\frac{d}{dz}\right)^{\varkappa}\left(\varrho^k(1+\varrho^2)^{m-k}F\left(A, B; A+B+1-C; \frac{1}{1+\varrho^2}\right)\right),$$

где $\varkappa = \eta$ при $z \neq 0$, $\varkappa = 2\eta$ при $z = 0$, а F — гипергеометрическая функция Гаусса [2]. Определим на $\mathfrak{X} \setminus \{o\}$ функцию $\Xi_{\lambda,\eta,k,m,j}(x) = \Xi_{\lambda,\eta,k,m}(\varrho(x))Y_j^{k,m}(\sigma(x))$. Тогда можно показать, что $\Xi_{\lambda,\eta,k,m,j}$ продолжается по непрерывности на $\mathrm{Ant}\, o$ и является гладкой функцией на $X \setminus \{o\}$. Кроме того, $(L - \rho_X^2 + \lambda^2)^{\eta+1}\Xi_{\lambda,\eta,k,m,j} = 0$ на $X \setminus \{o\}$, где L — оператор Лапласа–Бельтрами на X. Аналогичные функции $\Xi_{\lambda,\eta,k,m,j}$ (несколько более громоздким образом) можно определить и для $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. При $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathfrak{X})$, $T \neq 0$, пусть $\Xi_T = \{\Xi_{\lambda,\eta,k,m,j}\}$, где λ пробегает множество $\mathcal{Z}(\widetilde{T})$, $\eta = 0, \ldots, n(\lambda, T)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m = 0, \ldots, M_X(k)$, $j = 1, \ldots, d_X^{k,m}$; тогда $\Xi_T \subset C_T^\infty(X \setminus \{o\})$. Обозначим $\Xi_{T,a} = \{f(a^{-1}\cdot) \colon f \in \Xi_T\}$, $a \in G$. Следующие результаты являются аналогами теорем 1–4 для компактного случая.

Теорема 5. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathfrak{X})$ имеет фундаментальное решение E, $U \subset X$ открыто, $A \subset G$ — множество такое, что $A \cdot o \subset X \setminus U$, и $A \cdot o$ пересекается с каждой компонентой связности $X \setminus U$. Тогда*

$$\mathrm{span}_{C^\infty(U)} \bigcup_{a \in A} \Xi_{T,a} = C_T^\infty(U).$$

Следствие. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathfrak{X})$ обладает фундаментальным решением, $U \subset \mathfrak{X}$ открыто, $A \subset G$ — множество такое, что $A \cdot o \subset X \setminus U$, и $\mathrm{Ant}\, o \bigcup A \cdot o$ пересекается с каждой компонентой связности $X \setminus U$. Тогда*

$$\mathrm{span}_{C^\infty(U)}\left(\Phi_T \bigcup \bigcup_{a \in A} \Xi_{T,a}\right) = C_T^\infty(U).$$

Теорема 6. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathfrak{X})$, $T \neq 0$, $U \subset X$ открыто, V — объединение U и некоторого семейства компонент связности $X \setminus U_{r(T)}$ (очевидно, V открыто). Тогда:*

(i) если у T имеется фундаментальное решение и $f \in \mathcal{D}'(U)$ аппроксимируется в $*$-слабой топологии $\mathcal{D}'(U)$ распределениями из $\mathcal{D}'_T(V)$, то и само f продолжается до распределения из $\mathcal{D}'_T(V)$, причем единственным образом;

(ii) если $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}) \setminus (\rho_X + 2\mathbb{Z}_+)$, Ψ_λ — решение уравнения $(L - \rho_X^2 + \lambda^2)^{n(\lambda,T)+1}f = 0$ на U, не продолжающееся до решения этого уравнения на V, то Ψ_λ не принадлежит замкнутой линейной оболочке в $\mathcal{D}'(U)$ ограничений на U функций из $\mathcal{D}'_T(V)$ и решений уравнений $(L - \rho_X^2 + \mu^2)^{n(\mu,T)+1}f = 0$ на U, $\mu \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}) \setminus \{\lambda\}$.

1. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer, 2003. – 454 p.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Москва: Наука. – Т. 1. – 1973. – 296 с.; Т. 2. – 1974. – 296 с.
3. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – Москва: Мир. – Т. 1. – 1986. – 464 с.; Том 2. – 1986. – 456 с.
4. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – Москва: Мир, 1987. – 736 с.
5. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Uniqueness theorems and descriptions of solutions for convolution equations on symmetric spaces and for the twisted convolution equation on $\mathbb{C}^n$. – Донецк: Изд-во Донецк. нац. ун-та, 2005. – 82 с.

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 23.12.2008

D. A. Zaraisky

On the approximation of functions with zero ball means by linear combinations of the Laplace operator eigenfunctions

It is proved that certain linear combinations of the Bessel functions are dense in the C^∞-topology in the space of functions with zero integrals over balls of fixed radii on an arbitrary open domain $U \subset \mathbb{R}^n$. Generalizations of this result to solutions of some convolution equations of the form $f * T = 0$, T is radial, are obtained. Analogs for symmetric spaces of rank one are considered.