УДК 515.145+515.143

С. І. Максименко

Функції з однорідними особливостями на компактних поверхнях

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

Нехай M — компактна поверхня і P — або числова пряма $\mathbb{R}$, або коло S^1. У роботі розглядається підпростір $\mathcal{F}(M,P) \subset C^\infty(M,P)$, що складається з відображень, які мають ізольовані критичні точки та задовольняють певні умови невиродженості. Для кожного $f \in \mathcal{F}(M,P)$ знайдено гомотопічні типи його стабілізаторів та орбіт відносно правої дії групи дифеоморфізмів $\mathcal{D}(M)$ поверхні.

Нехай M — компактна поверхня, P — або числова пряма $\mathbb{R}$, або коло S^1 і $D(M)$ — група C^∞-дифеоморфізмів поверхні M. Для кожного $f \in C^\infty(M,P)$ позначимо через Σ_f множину його критичних точок, а через $\mathcal{D}(M,\Sigma_f)$ — підгрупу в $\mathcal{D}(M)$, яка лишає множину Σ_f інваріантною, тобто $\mathcal{D}(M,\Sigma_f) = \{h \in \mathcal{D}(M)\colon h(\Sigma_f) = \Sigma_f\}$.

Визначимо *праву* дію групи $\mathcal{D}(M)$ на $C^\infty(M,P)$ за формулою [1]

$$h \cdot f = f \circ h\colon M \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} P$$

для $h \in \mathcal{D}(M)$ і $f \in C^\infty(M,P)$. Нехай $\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M)\colon f \circ h = f\}$ та $\mathcal{O}(f) = \{f \circ h\colon h \in \mathcal{D}(M)\}$ — відповідно стабілізатор та орбіта f відносно дії $\mathcal{D}(M)$. Аналогічно позначимо через $\mathcal{S}(f,\Sigma_f)$ та $\mathcal{O}(f,\Sigma_f)$ стабілізатор та орбіту f відносно правої дії $\mathcal{D}(M,\Sigma_f)$. Тоді легко бачити [2], що

$$\mathcal{S}(f,\Sigma_f) = \mathcal{S}(f), \qquad \mathcal{O}(f,\Sigma_f) \subset \mathcal{O}(f).$$

На $\mathcal{D}(M)$ та $C^\infty(M,P)$ задамо сильні C^∞-топології Уїтні [3]. Ці топології індукують деякі топології на відповідних стабілізаторах та орбітах функцій. Позначимо через $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ компоненту лінійної зв'язності тотожного відображення id_M в $\mathcal{S}(f)$, а через $\mathcal{O}_f(f)$ та $\mathcal{O}_f(f,\Sigma_f)$ — компоненти лінійної зв'язності f в орбітах $\mathcal{O}(f)$ та $\mathcal{O}(f,\Sigma_f)$ відповідно.

У [4] автор обчислив гомотопічні типи $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$, $\mathcal{O}_f(f)$ та $\mathcal{O}_f(f,\Sigma_f)$ для випадку, коли $f\colon M \to P$ є відображенням Морса. Мета даної роботи — перенести ці обчислення на ширший клас відображень $\mathcal{F}(M,P) \subset C^\infty(M,P)$ з виродженими особливостями.

Нагадаємо, що відображення $f\colon M \to P$ називається відображенням *Морса*, якщо всі його критичні точки є *невиродженими*. Згідно з лемою Морса (напр., [3]), це означає, що в околі кожної критичної точки $z \in \Sigma_f$ існує локальне представлення $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, в якому $z = (0,0)$ і $f(x,y)$ задається однією з таких форм: x^2+y^2, x^2-y^2 або $-x^2-y^2$, тобто є *однорідним многочленом 2-го степеня без кратних множників*. Якщо зафіксувати орієнтацію P, то число мінусів не залежить від конкретного вибору такого локального представлення і називається *індексом* критичної точки z.

Позначимо через $C^\infty_\partial(M,P)$ підмножину в $C^\infty(M,P)$, що складається з відображень f, які задовольняють таку умову:

f є локально постійним на ∂M (тобто набуває постійного значення на кожній компоненті зв'язності ∂M, хоча для різних компонент ці значення можуть бути різними) і всі його критичні точки лежать у внутрішності $\mathrm{Int} M$.

Нехай далі $\mathcal{F}(M,P)$ — підмножина в $C^\infty_\partial(M,P)$, що складається з відображень f таких, що

для кожної критичної точки $z \in \Sigma_f$ існує локальне представлення $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, в якому $z = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, а f є однорідним многочленом без кратних множників.

Зі сказаного вище випливає, що $\mathcal{F}(M,P)$ містить відкриту і всюди щільну в $C^\infty_\partial(M,P)$ множину морсівських відображень. У даній роботі буде показано, що обчислення, аналогічні [4], можна провести для функцій з $\mathcal{F}(M,P)$.

Відзначимо, що за винятком невеликої кількості випадків кожне відображення $f \in \in \mathcal{F}(M,P)$ має або вироджену критичну точку, або невироджену критичну точку індексу 1. Виняток становлять усього 6 типів випадків — це відображення Морса, які або взагалі не мають критичних точок, або всі їх критичні точки є локальними екстремумами. Для них опис гомотопічних типів $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$, $\mathcal{O}_f(f)$ та $\mathcal{O}_f(f,\Sigma_f)$ дається в [4, теорема 1.9]. Для всіх інших відображень з класу $\mathcal{F}(M,P)$ гомопічні типи їх орбіт та стабілізаторів описуються наведеним нижче твердженням, яке узагальнює [4, теореми 1.3, 1.5] та [2].

Теорема 1. *Нехай $f \in \mathcal{F}(M,P)$ має рівно $n \geqslant 1$ критичних точок. Припустимо, що хоча б одна з них є або виродженою, або невиродженою індексу 1. Тоді $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ є стягуваним, $\mathcal{O}_f(f,\Sigma_f)$ гомотопічно еквівалентна добутку m-кіл $S^1 \times \cdots \times S^1$, де m — кількість вироджених локальних естремумів, а $\mathcal{O}_f(f)$ гомотопічно еквівалентна деякому CW-комплексу розмірності $\leqslant 2n-1$. Більше того, $\pi_k\mathcal{O}_f(f) = \pi_k M$, $\pi_2\mathcal{O}_f(f) = 0$ і має місце така точна послідовність:*

$$1 \to \pi_1\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M) \oplus \mathbb{Z}^r \to \pi_1\mathcal{O}_f(f) \to G \to 1 \tag{1}$$

для деякого $r \geqslant 0$ та деякої скінченної групи G.

Доведення базується на наведених нижче двох лемах і проводиться аналогічно [2, 4]. Тому ми опишемо лише ключові кроки та вкажемо принципові відмінності від морсівського випадку.

Лема 1. *Для кожного $f \in \mathcal{F}(M,P)$ відображення $p\colon \mathcal{D}(M) \to \mathcal{O}(f)$, визначене за формулою $p(h) = f \circ h$, $h \in \mathcal{D}(M)$, та його обмеження $p|_{\mathcal{D}(M,\Sigma_f)}\colon \mathcal{D}(M,\Sigma_f) \to \mathcal{O}(f,\Sigma_f)$ на $\mathcal{D}(M,\Sigma_f)$ є головними локально тривіальними $\mathcal{S}(f)$-розшаруваннями.*

Лема 2. *Якщо $f \in \mathcal{F}(M,P)$ не є морсівським, то $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ — стягуваний.*

З леми 1 випливає, що мають місце такі точні послідовності гомотопічних груп розшарування p:

$$\cdots \to \pi_i\mathcal{S}(f) \to \pi_i\mathcal{D}(M) \to \pi_i\mathcal{O}(f) \to \pi_{i-1}\mathcal{S}(f) \to \cdots, \tag{2}$$

$$\cdots \to \pi_i\mathcal{S}(f) \to \pi_i\mathcal{D}(M,\Sigma_f) \to \pi_i\mathcal{O}(f,\Sigma_f) \to \pi_{i-1}\mathcal{S}(f) \to \cdots. \tag{3}$$

Тепер теорема [1] доводиться за схемою [4, теорема 1.3; 2, теорема 2] з використанням відомої інформації про гомотопічні типи груп $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M)$ [5–7], стягуваності $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ та точних послідовностей (2) та (3). Основна відмінність полягає в тому, що граф Кронрода–Ріба Γ_f відображення f (напр. [4, § 3.1]), необхідно модифікувати.

Перед тим як доводити леми 1 та 2, нагадаємо кілька означень та допоміжних тверджень.

Числа Мілнора. Нехай $\mathbb{F}$ — поле $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ і $\mathcal{A}$ позначає одну з таких алгебр над $\mathbb{F}$:

1) $\mathbb{F}\{\mathbf{x}\}$ — $\mathbb{F}$-алгебра аналітичних функцій від n-змінних над $\mathbb{F}$ (ряди, збіжні в деякому околі $0 \in \mathbb{F}^n$);

2) $C^\infty(\mathbf{x})$ — $\mathbb{R}$-алгебра ростків C^∞ функцій $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ у точці $0 \in \mathbb{R}^n$.

Для кожного $f \in \mathcal{A}$ позначимо через $J_{\mathcal{A}}(f)$ ідеал в $\mathcal{A}$, породжений його частинними похідними в точці $0 \in \mathbb{F}^n$. Цей ідеал називається *ідеалом Якобі* або *градієнтним ідеалом* f у цій точці, а його корозмірність в $\mathcal{A}$ над $\mathbb{F}$:

$$\mu_{\mathcal{A}}(f) = \dim_{\mathbb{F}}[\mathcal{A}/J_{\mathcal{A}}(f)],$$

називають $\mathcal{A}$-*числом Мілнора*, або *корозмірністю* [8, § 7], або *кратністю* [1, § 1.6.3] f у точці $0 \in \mathbb{F}^n$. Очевидно, що мають місце такі включення:

$$C^\infty(\mathbf{x}) \supset \mathbb{R}\{\mathbf{x}\} \subset \mathbb{C}\{\mathbf{x}\}.$$

Доведення поданої нижче леми проводиться безпосередньо.

Лема 3. *Нехай $f \in \mathcal{A}$. Тоді мають місце такі співвідношення між числами Мілнора:*

$$\mu_{C^\infty(\mathbf{x})} \leqslant \mu_{\mathbb{R}\{\mathbf{x}\}} \leqslant 2\mu_{\mathbb{C}\{\mathbf{x}\}},$$

за умови, що в кожній нерівності більше з чисел визначене (тобто $\mathcal{A}$ міститься у відповідній алгебрі) і є скінченним.

Однорідні многочлени без кратних множників. Нехай $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — ненульовий однорідний многочлен. Очевидно, що $0 \in \mathbb{R}^2$ є критичною точкою f тоді і тільки тоді, коли $\deg f \geqslant 2$. Також добре відомо, що f розпадається на незвідні множники: $f(x,y) = \prod_{i=1}^{l} L_i^{l_i}(x,y) \prod_{j=1}^{q} Q_j^{q_j}(x,y)$, де кожен L_i є лінійною функцією, а кожен Q_j — незвідною над $\mathbb{R}$ квадратичною формою, причому l_i, $q_j \geqslant 1$, $L_i/L_{i'} \neq \mathrm{const}$ для $i \neq i'$ та $Q_j/Q_{j'} \neq \mathrm{const}$ для $j \neq j'$.

Відзначимо, що f можна розглядати як однорідний комплексний многочлен $\hat{f}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ від двох комплексних змінних з дійсними коефіцієнтами. Тоді $\hat{f}$ розпадається на лінійні множники.

Лема 4. *Еквівалентними є такі умови:*

(a) *f не має кратних множників у $\mathbb{R}[x,y]$, тобто $l_i = q_j = 1$;*

(b) *$\hat{f}$ не має кратних множників $\mathbb{C}[x,y]$;*

(c) *$0 \in \mathbb{C}^2$ є единою критичною точкою $\hat{f}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$;*

(d) *$\mu_{\mathbb{C}\{x,y\}}(f) < \infty$.*

Доведення. Еквівалентність між (a), (b) і (c) очевидна, а еквівалентність (c) та (d) випливає з [1, §§ 5.5, 5.9].

З леми випливає, що відображення з $\mathcal{F}(M,P)$ мають лише ізольовані критичні точки, а оскільки M компактна, то цих точок скінченне число.

Доведення леми 1. Досить показати, що f має *скінченну корозмірність*, тобто його орбіта $\mathcal{O}(f)$ є підмноговидом Фреше в $C^\infty_\partial(M,P)$ скінченної корозмірності. Тоді з [8, 9] випливатиме, що p є головним локально тривіальним $\mathcal{S}(f)$-розшаруванням (див. також [4, § 11]). Оскільки кількість критичних точок скінченна, то, згідно з [8, § 7], досить встановити, що для кожної критичної точки $z \in \Sigma_f$ скінченним є її число Мілнора $\mu_{C^\infty(x,y)}(f,z)$. Але з лем 4 та 3 маємо $\mu_{C^\infty(x,y)}(f,z) \leqslant 2\mu_{\mathbb{C}\{x,y\}}(f,z) < \infty$.

Схема доведення леми 2. Для спрощення вважатимемо, що M є орієнтовною поверхнею. Якщо $f \in \mathcal{F}(M,P)$ є морсівським, то простір $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ є або стягуваним, або гомотопічно еквівалентним колу S^1 [4, теорема 1.3]. Ідея доведення теореми 1.3 з роботи [4] полягала в тому, щоб ототожнити $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ з образом $\varphi(\Gamma^+)$ деякої опуклої підмножини $\Gamma^+ \subset C^\infty(M,\mathbb{R})$ відносно так званого *відображення зсуву φ уздовж орбіт "майже" гамільтонового векторного поля F відображення f* (див. [10]) і показати, що $\varphi\colon \Gamma^+ \to \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ є або гомеоморфізмом або нескінченним циклічним накриваючим відображенням. Якщо f має критичну точку індексу 1, то легко встановити, що φ ін'єктивне відображення, а тому є гомеоморфізмом. Використовуючи результати [4, 10–12], можна довести аналогічне твердження для довільного відображення $f \in \mathcal{F}(M,P)$. Тому залишається показати, що для $f \in \mathcal{F}(M,P)$, яке не є морсівським, відображення зсуву φ завжди буде ін'єктивним.

Отже, нехай $f \in \mathcal{F}(M,P)$ не є морсівським, тобто f має критичну точку, в околі якої в деяких локальних координатах (x,y) відображення f є однорідним многочленом степеня $\geqslant 3$. Розглянемо відповідне локальне гамільтонове векторне поле $F(x,y) = -f'_y\partial/\partial x + f'_x\partial/\partial y$ відображення f в околі такої точки. Оскільки $\deg f \geqslant 3$, то $\deg F \geqslant 2$, тобто лінійна частина поля F у точці $z=0$ дорівнює нулю: $j^1F(0)=0$. Тому дотичний потік поля F на дотичному просторі T_zM є тотожним. Згідно з [10, твердження 13] це означає, що відображення зсуву φ є ін'єктивним. Лему доведено.

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений, I. — Москва: Наука, 1982. – 304 с.
2. *Maksymenko S.* Homotopy dimension of orbits of Morse functions on surfaces // Trav. Math. – 2008. – **18**. – P. 39–44.
3. *Хирш М.* Дифференциальная топология. – Москва: Мир, 1979. – 280 с.
4. *Maksymenko S.* Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces // Ann. Glob. Anal. Geom. – 2006. – **29**, No 3. – P. 241–285.
5. *Earle C. J., Eells J.* The diffeomorphism group of a compact Riemann surface // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – **73**, No 4. – P. 557–559.
6. *Earle C. J., Schatz A.* Teichmüller theory for surfaces with boundary // J. Different. Geom. – 1970. – **4**. – P. 169–185.
7. *Gramain A.* Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte // Ann. sci. Ecole norm. supér. 4-e ser. – 1973. – **6**. – P. 53–66.
8. *Segreraert F.* Un théorème de fonction implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications // Ann. sci. Ecole norm. supér. 4-e ser. – 1972. – **5**. – P. 599–660.
9. *Poenaru V.* Un théorème des fonctions implicites pour les espaces d'applications C^∞ // Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. – 1970. – **38**. – P. 93–124.
10. *Maksymenko S.* Smooth shifts along trajectories of flows // Topol. Appl. – 2003. – **130**. – P. 183–204.
11. *Максименко С.* Гамільтонові векторні поля однорідних многочленів на площині // Проблеми топології та суміжні питання. Праці Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 3. – С. 269–308.
12. *Maksymenko S.* ∞-jets of difeomorphisms preserving orbits of vector fields // Centr. Europ. J. Math. – 2009. – **7**, No. 2. – P. 272–298.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 17.12.2008

S. I. Maksymenko

Functions with homogeneous singularities on compact surfaces

Let M be a compact surface and P be either the real line $\mathbb{R}$ or a circle S^1. A certain subset $\mathcal{F}(M,P) \subset C^\infty(M,P)$ which includes all Morse maps is introduced. For each $f \in \mathcal{F}(M,P)$, the homotopy types of its stabilizers and orbits with respect to the action of the diffeomorphism group $\mathcal{D}(M)$ of M are calculated.