

Г. П. Пелюх, О. А. Сівак

Про періодичні розв'язки систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь

(Представлено академіком НАН України А. М. Самоїленком)

Одержано умови існування неперервних T -періодичних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь і досліджено структуру множини їх розв'язків.

Розглянемо систему лінійних рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + \sum_{j=1}^k A_j(t)x(m_j t + \Delta_j(t)) + F(t), \quad (1)$$

де $t \in R = (-\infty, +\infty)$, $A, A_j(t), j = 1, \dots, k$, — деякі дійсні $(n \times n)$ -матриці; $F(t)$ — дійсний вектор розмірності n , $\Delta_j(t): R \rightarrow R, j = 1, \dots, k, m_j, j = 1, \dots, k$, — цілі додатні числа. При різних припущеннях такі системи рівнянь були основним об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1–6] і наведену в них літературу) і в даний час цілий ряд питань їх теорії досить детально вивчено. Зокрема, якщо $\Delta_j(t) = -j, j = 1, 2, \dots, k$, елементи матриць $A_j(t), j = 1, \dots, k$, і вектора $F(t)$ є неперервними T -періодичними функціями, то в [7] отримані достатні умови існування і єдиності неперервного T -періодичного розв'язку такої системи рівнянь і досліджено його властивості. Продовжуючи ці дослідження, в даній статті пропонується один підхід до вивчення неперервних T -періодичних розв'язків системи рівнянь (1) у випадку, коли виконуються умови:

- 1) $j = 1, \dots, k$, і вектора $F(t)$ є неперервними T -періодичними функціями;
- 2) функції $\Delta_j(t), j = 1, \dots, k$, є неперервними T -періодичними, $m_j, j = 1, \dots, k$, — деякі цілі додатні числа;

$$3) \max_t |A_j(t)| = a_j, j = 1, \dots, k, \max_t |F(t)| = M, |A| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = a < 1;$$

$$4) \Delta = \frac{\sum_{l=1}^k a_l}{1-a} < 1.$$

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1–4. Тоді система рівнянь (1) має єдиний неперервний T -періодичний розв'язок $x(t)$ у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \quad (2)$$

де $x_i(t), i = 0, 1, \dots$, — деякі неперервні T -періодичні вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (2) в (1), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1) = A \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + \sum_{j=1}^k A_j(t) \sum_{i=0}^{\infty} x_i(m_j t + \Delta_j(t)) + F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + F(t), \quad (3_0)$$

$$x_i(t+1) = Ax_i(t) + \sum_{j=1}^k A_j(t)x_{i-1}(m_j t + \Delta_j(t)), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3_i)$$

то ряд (2) є формальним розв'язком системи рівнянь (1).

Безпосередньою підстановкою в (3₀) можна переконатися, що ряд

$$x_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1} F(t-j) \quad (4_0)$$

є формальним розв'язком системи рівнянь (3₀). Більше цього, в силу умов 1–4 ряд (4₀) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ і задовольняє умову

$$|x_0(t)| \leq \frac{M}{1-a} = M'. \quad (5_0)$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (3_{*i*}), $i = 1, 2, \dots$, можна показати, що ряди

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1} \left(\sum_{l=1}^k A_l(t-j)x_{i-1}(m_l(t-j) + \Delta_l(t-j)) \right), \quad i = 1, 2, \dots \quad (4_i)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, які є розв'язками відповідних систем (3_{*i*}), $i = 1, 2, \dots$, і задовольняють умови

$$|x_i(t)| \leq M' \Delta^i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5_i)$$

Дійсно, в силу (4₁) і умов 1–4 отримуємо

$$\begin{aligned} |x_1(t)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |A|^{j-1} \left(\sum_{l=1}^k |A_l(t-j)| |x_0(m_l(t-j) + \Delta_l(t-j))| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} \left(M' \sum_{l=1}^k a_l \right) \leq M' \frac{\sum_{l=1}^k a_l}{1-a} = M' \Delta \end{aligned}$$

і, отже, оцінка (5₁) має місце. Припустимо, що вона доведена уже для деякого $i \geq 1$ і покажемо її справедливості для $i+1$. Справді, приймаючи до уваги (4_{*i+1*}), (5_{*i*}) і умови теореми, знаходимо

$$\begin{aligned} |x_{i+1}(t)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |A|^{j-1} \left(\sum_{l=1}^k |A_l(t-j)| |x_i(m_l(t-j) + \Delta_l(t-j))| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} \left(\sum_{l=1}^k a_l \right) M' \Delta^i \leq M' \Delta^i \frac{\sum_{l=1}^k a_l}{1-a} = M' \Delta^{i+1}. \end{aligned}$$

Отже, оцінки (5_{*i*}) виконуються для всіх $i \geq 1$.

Оскільки вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, що визначаються співвідношеннями (4_i), $i = 0, 1, \dots$, є T -періодичними (в силу умов 1,2), то безпосередньо із (5_i), $i = 0, 1, \dots$, випливає, що ряд (2) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної T -періодичної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (1).

Припустимо тепер, що система рівнянь (1) має ще один неперервний T -періодичний розв'язок $y(t)$ такий, що $y(t) \neq x(t)$. Оскільки

$$y(t+1) \equiv Ay(t) + \sum_{j=1}^k A_j(t)y(m_j t + \Delta_j(t)) + F(t),$$

то приймаючи до уваги умови теореми 1, одержимо

$$\begin{aligned} |x(t+1) - y(t+1)| &\leq |A||x(t) - y(t)| + \sum_{j=1}^k |A_j(t)||x(m_j t + \Delta_j(t)) - y(m_j t + \Delta_j(t))| \leq \\ &\leq \left(a + \sum_{j=1}^k a_j \right) \|x(t) - y(t)\|, \end{aligned}$$

де $\|x(t) - y(t)\| = \max_t |x(t) - y(t)|$. Звідси випливає співвідношення

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \left(a + \sum_{j=1}^k a_j \right) \|x(t) - y(t)\|,$$

яке, в силу умови 4, може мати місце лише у випадку, коли $y(t) \equiv x(t)$. Отримане протиріччя завершує доведення теореми.

Виконуючи в (1) взаємно-однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t),$$

де $\gamma(t)$ — побудований вище неперервний T -періодичний розв'язок системи (1), дослідження системи рівнянь (1) можна звести до дослідження системи рівнянь

$$y(t+1) = Ay(t) + \sum_{j=1}^k A_j(t)y(m_j t + \Delta_j(t)).$$

При виконанні умов теореми 1 ця система рівнянь має єдиний неперервний T -періодичний розв'язок $y(t) \equiv 0$. Тим не менш, при деяких додаткових умовах вона має нескінченно багато неперервних при $t \geq 0$ розв'язків. Це ми покажемо (для простоти) у випадку, коли $\Delta_j(t) \equiv 0$, $j = 1, \dots, k$, m_j , $j = 1, \dots, k$, — деякі цілі додатні числа, а матриця A має вигляд $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, де $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Отже, розглянемо систему рівнянь

$$y(t+1) = Ay(t) + \sum_{j=1}^k A_j(t)y(m_j t) \tag{6}$$

і доведемо, що для неї має місце така теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1 і умови:

1') $m_j > 1, j = 1, \dots, k;$

2') $\tilde{a}\lambda^m < 1, \tilde{a} \sum_{l=1}^k a_l / (1 - \tilde{a}\lambda^m) = \tilde{\Delta} < 1,$

де $\tilde{a} = |A^{-1}|, \lambda = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \dots, n\}, m = \min\{m_j, j = 1, \dots, k\}$. Тоді система рівнянь (6) має сім'ю неперервних при $t \geq 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.

Доведення. Легко переконатися, що система рівнянь (6) має формальний розв'язок у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \quad (7)$$

якщо вектор-функції $y_i(t), i = 0, 1, \dots,$ є неперервними розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = Ay_0(t), \quad (8_0)$$

$$y_i(t+1) = Ay_i(t) + \sum_{j=1}^k A_j(t)y_{i-1}(m_j t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (8_i)$$

Використовуючи представлення загального неперервного розв'язку системи (8₀), можна показати, що існує додатна стала \tilde{M} така, що при всіх $t \geq 0$ виконується оцінка

$$|y_0(t)| \leq \tilde{M}\lambda^t. \quad (9_0)$$

Безпосередньою підстановкою в (8_i), $i = 1, 2, \dots,$ можна послідовно показати, що ряди

$$y_i(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} \left(\sum_{l=1}^k A_l(t+j)y_{i-1}(m_l(t+j)) \right), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (9_i)$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь.

Покажемо тепер, що ряди (9_i), $i = 1, 2, \dots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i = 1, 2, \dots,$ для яких при всіх $i \geq 1, t \geq 0$ виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq \tilde{M}\tilde{\Delta}^i \lambda^{mt}. \quad (10)$$

Дійсно, в силу (9₀) і (9₁) маємо

$$\begin{aligned} |y_1(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \left(\sum_{l=1}^k |A_l(t+j)| |y_0(m_l(t+j))| \right) \leq \tilde{M}\tilde{a} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}^j \sum_{l=1}^k a_l \lambda^{m(t+j)} \leq \\ &\leq \tilde{M}\tilde{a} \sum_{l=1}^k a_l \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{a}\lambda^m)^j \lambda^{mt} = \tilde{M} \frac{\tilde{a} \sum_{l=1}^k a_l}{1 - \tilde{a}\lambda^m} \lambda^{mt} \leq \tilde{M}\tilde{\Delta} \lambda^{mt}. \end{aligned}$$

Отже, оцінка (10) має місце при $i = 1$. Припустимо, що вона доведена уже для деякого $i \geq 1$ і покажемо її справедливність для $i + 1$. Дійсно, в силу (9_{i+1}), (10) $i = 1, 2, \dots,$ маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \left(\sum_{l=1}^k |A_l(t+j)| |y_i(m_l(t+j))| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}^{j+1} \left(\sum_{l=1}^k a_l \tilde{M} \tilde{\Delta}^i \lambda^{m(m_l(t+j))} \right) \leq \tilde{M} \tilde{\Delta}^i \tilde{a} \sum_{l=1}^k a_l \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{a} \lambda^m)^j \lambda^{mt} = \tilde{M} \tilde{\Delta}^{i+1} \lambda^{mt}.$$

Отже, оцінки (10) виконуються для всіх $i \geq 1$, і ряди (9_i), $i = 1, 2, \dots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$.

Цим самим, ми довели, що ряд (7) рівномірно збігається при всіх $t \geq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (6) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \tilde{M} \frac{1}{1 - \tilde{\Delta}} \lambda^t. \quad (11)$$

Теорема 2 доведена.

Оскільки $0 < \lambda < 1$, то в силу (11) маємо

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t)| = 0. \quad (12)$$

Звідси, з теорем 1, 2 і співвідношення $x(t) = y(t) + \gamma(t)$ безпосередньо випливає, що система рівнянь (1) має сім'ю неперервних при $t \geq 0$ розв'язків $x(t) = x(t, \omega(t))$, де $\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична вектор-функція, які задовольняють умову

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \gamma(t)] = 0.$$

Робота частково підтримана проектом Ф 25.1/021.

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – **12**, No 2. – P. 242–284.
2. *Митропольський Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
3. *Пелюх Г. П.* К теории линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН. – 1994. – **336**, № 4. – С. 451–452.
4. *Пелюх Г. П.* Общее решение одного класса систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Диф. уравнения. – 1994. – **30**, № 3. – С. 514–519.
5. *Пелюх Г. П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. АН. – 2006. – **73**, № 2. – С. 269–272.
6. *Сивак О. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь із раціональними відхиленнями неперервного аргументу // Наук. вісті НТУУ “КПІ”. – 2007. – № 4. – С. 152–157.
7. *Пелюх Г. П., Богай Н. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. – 2005. – № 3. – С. 351–359.

*Інститут математики НАН України, Київ
НТУУ “Київський політехнічний інститут”*

Надійшло до редакції 03.12.2008

G. P. Pelyukh, O. A. Sivak

About periodic solutions to systems of linear functional-difference equations

The conditions for the existence of continuous T-periodic solutions to systems of linear functional-difference equations are established, and the structure of the set of their solutions is studied.