УДК 519.6;539.3

Л. І. Винницька, академік НАН України **Я. М. Григоренко,**
Я. Г. Савула

Гетерогенна математична модель пружного тіла з тонким податливим на згин включенням

Описано гетерогенну математичну модель пружного тіла з тонким включенням. Напружено-деформований стан включення моделюється співвідношеннями безмоментної теорії оболонок, для масивної частини застосовуються співвідношення класичної теорії пружності. Результати числових експериментів подано для плоскої задачі, що описує розтяг пластини з круговим отвором. Досліджується вплив тонкого покриття на коефіцієнт концентрації напружень та розподіл напружень у пластині.

Розглянемо пружне тіло, обмежене областю $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2^*$, де Ω_1, Ω_2^* — тривимірні підобласті з ліпшицевими границями $\Gamma_1 = \Gamma_1^+ \bigcup \Gamma_1^- \bigcup \Gamma_1^B \bigcup \Gamma_1^J$, $\Gamma_2^* = \Gamma_2^+ \bigcup \Gamma_2^- \bigcup \Gamma_2^{*B} \bigcup \Gamma_2^{*J}$ відповідно. Поперечний переріз тіла ($x_2 = \text{const}$) подано на рис. 1. Вважатимемо, що тонке включення Ω_2^* не виходить за межі масивної частини Ω_1. Нехай напружено-деформований стан тіла, що займає область Ω_1, описується співвідношеннями теорії пружності [1], а напружено-деформований стан середовища, що обмежене областю Ω_2^*, — співвідношеннями безмоментної теорії оболонок [2]. Вважатимемо, що на спільних частинах границь Γ_1, Γ_2^* виконуються умови ідеального механічного контакту.

Нехай задано відображення $\theta\colon (\xi_1, \xi_2) \in \overline{\Omega}_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \theta(\xi_1, \xi_2) \in \overline{S} \subset \mathbb{R}^3$, де (ξ_1, ξ_2) — довільна точка з Ω_2. Вважаємо, що лінії ξ_1, ξ_2 є координатними лініями на поверхні S. Введемо вектори $\vec{\theta}_3 = \partial\theta/\partial\xi_i$, $i = 1, 2$, $\vec{\theta}_3 = \vec{\theta}_1 \times \vec{\theta}_2$, які є триортогональними, $\vec{\theta}_1$, $\vec{\theta}_2$ визначають дотичну до S площину, $\vec{\theta}_3$ — вектор нормалі до S.

Область Ω_1 віднесемо до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, а область Ω_2^* — до криволінійної триортогональної системи координат $\xi_1\xi_2\xi_3$, $\xi_3 \in [-h/2; h/2]$, де h — товщина включення, яка є сталою.

Вважаємо, що границя Γ_2^+ є лицьовою поверхнею $\xi_3 = h/2$ оболонки, Γ_2^- — лицьовою поверхнею $\xi_3 = -h/2$, $\Gamma_2^{*J} \bigcup \Gamma_2^{*B}$ є боковою поверхнею оболонки, яка утворена рухом перпендикуляра до серединної поверхні S вздовж її границі ∂S. Для границь контакту областей Ω_1

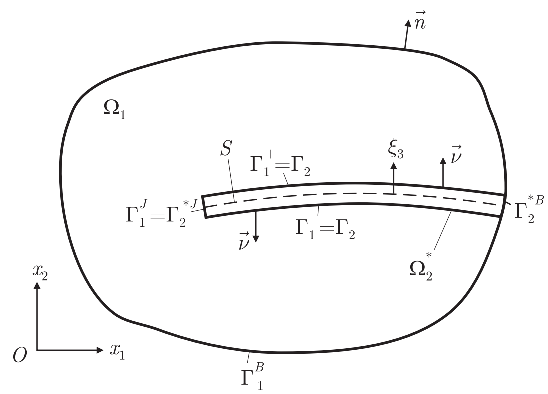

Рис. 1

та Ω_2^* виконуються співвідношення $\Gamma_1^+ = \Gamma_2^+$, $\Gamma_1^- = \Gamma_2^-$, $\Gamma_1^J = \Gamma_2^{*J}$. Нехай $\Gamma_2 = \Gamma_2^J \bigcup \Gamma_2^B$ — границя області Ω_2 і $\Gamma_2^{*J} = \Gamma_2^J \times [-h/2; h/2]$, $\Gamma_2^{*B} = \Gamma_2^B \times [-h/2; h/2]$.

В точках поверхні Γ_1 задамо праву ортонормовану трійку векторів $\vec{n}$, $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, де $\vec{n}$ — вектор зовнішньої нормалі, а $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$ лежать у дотичній площині. Через $\vec{\nu}$, $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$ позначимо праву ортонормовану трійку векторів, які визначені в точках поверхонь Γ_2^+, Γ_2^-, ∂S. Вважаємо, що для Γ_2^+, Γ_2^- вектор $\vec{\nu}$ є вектором зовнішньої нормалі, $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$ лежать в дотичній площині, в точках границі ∂S напрям $\vec{\nu}$ збігається з напрямом вектора $\vec{\theta}_3$, $\vec{\tau}_1$ — вектор нормалі до ∂S, $\vec{\tau}_2$ — вектор дотичної до ∂S.

Позначимо через $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ вектор переміщень точок області Ω_1, а через $\vec{\upsilon} = (\upsilon_1, \upsilon_2, w)$ — вектор переміщень точок області Ω_2.

Розглянемо частини границі $\Gamma_1^J = \Gamma_2^{*J}$. Нехай на цих поверхнях між трійками ортонормованих векторів мають місце співвідношення $\vec{n} = -\vec{\tau}_1$, $\vec{t}_1 = -\vec{\tau}_2$, $\vec{t}_2 = \vec{\nu}$. Тоді геометричні (головні) та статичні (природні) умови спряження мають вигляд

$$u_n = -\upsilon_{\tau_1}, \qquad u_{t_1} = -\upsilon_{\tau_2}, \qquad u_{t_2} = \upsilon_\nu, \tag{1}$$

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{nn} d\xi_3 = T_{\tau_1\tau_1}, \qquad \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{nt_1} d\xi_3 = T_{\tau_1\tau_2}, \qquad \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{nt_2} d\xi_3 = 0. \tag{2}$$

Для границь $\Gamma_1^+ = \Gamma_2^+$ і $\Gamma_1^- = \Gamma_2^-$ співвідношення між трійками ортонормованих векторів подамо так: $\vec{n} = -\vec{\nu}$, $\vec{t}_1 = -\vec{\tau}_2$, $\vec{t}_2 = -\vec{\tau}_1$. Задамо умови спряження на $\Gamma_1^+ = \Gamma_2^+$:

$$u_n = -w, \qquad u_{t_1} = -\upsilon_2, \qquad u_{t_2} = -\upsilon_1, \tag{3}$$

$$\sigma_{nn} = -\sigma_{13}^+, \qquad \sigma_{nt_1} = -\sigma_{23}^+, \qquad \sigma_{nt_2} = -\sigma_{33}^+, \tag{4}$$

а на $\Gamma_1^- = \Gamma_2^-$ ці умови задаються співвідношеннями

$$u_n = w, \qquad u_{t_1} = \upsilon_2, \qquad u_{t_2} = \upsilon_1, \tag{5}$$

$$\sigma_{nn} = -\sigma_{13}^-, \qquad \sigma_{nt_1} = -\sigma_{23}^-, \qquad \sigma_{nt_2} = -\sigma_{33}^-. \tag{6}$$

Нехай виконуються такі граничні умови:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1^B, \qquad \upsilon_1 = \upsilon_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2^B. \tag{7}$$

Варіаційне формулювання з урахуванням граничних умов (7) та умов спряження (1)–(6) має вигляд:

знайти такий розв'язок $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3, \upsilon_1, \upsilon_2, w) \in V$, *що*

$$a_1(\vec{u}, \tilde{\vec{u}}) + a_2(\vec{\upsilon}, \tilde{\vec{\upsilon}}) = l_1(\tilde{\vec{u}}) + l_2(\tilde{\vec{\upsilon}}) \qquad \forall \tilde{\vec{U}} \in V, \tag{8}$$

$$a_1(\vec{u}, \tilde{\vec{u}}) = \iiint\limits_{\Omega_1} (\sigma_{11}\widetilde{e}_{11} + \sigma_{22}\widetilde{e}_{22} + \sigma_{33}\widetilde{e}_{33} + \sigma_{12}\widetilde{e}_{12} + \sigma_{13}\widetilde{e}_{13} + \sigma_{23}\widetilde{e}_{23}) d\Omega_1,$$

$$a_2(\vec{\upsilon}, \tilde{\vec{\upsilon}}) = \iint\limits_{\Omega_2} (T_{11}\widetilde{\varepsilon}_{11} + T_{22}\widetilde{\varepsilon}_{22} + T_{12}\widetilde{\varepsilon}_{12}) d\Omega_2,$$

$$l_1(\vec{\widetilde{u}}) = \iiint\limits_{\Omega_1} (f_1\widetilde{u}_1 + f_2\widetilde{u}_2 + f_3\widetilde{u}_3)d\Omega_1,$$

$$l_2(\vec{\widetilde{v}}) = \iint\limits_{\Omega_2} \left\{ \int\limits_{-h/2}^{h/2} (1 + k_1\xi_3)(1 + k_2\xi_3)(p_1\widetilde{v}_1 + p_2\widetilde{v}_2 + p_3\widetilde{v}_3)d\xi_3 \right\} d\Omega_2,$$

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \vec{U}\colon u_1 \in H^1(\Omega_1),\ i = 1,2,3; \\ v_\alpha \in H^1(\Omega_2),\ \alpha = 1,2;\ w \in L_2(\Omega_2); \\ \text{умови (1), (3), (5), (7).} \end{array} \right\}$$

Для сформульованої задачі виконується така теорема.

Теорема. *Нехай $f_i \in L_2(\Omega_1)$, $p_i \in L_2(\Omega_2)$, $i = 1,2,3$, Ω_2^* — еліптична оболонка, на границі області Ω переміщення дорівнюють нулю. Тоді існує єдиний розв'язок варіаційної задачі* (8).

Дане твердження одержуємо як наслідок з леми Лакса–Мільграма [3], довівши відповідні властивості білінійних та лінійних форм, які входять у варіаційне рівняння (8).

Як приклад застосування запропонованої моделі, розглянемо плоску задачу для випадку, коли включення виходить на границю однією із лицьових поверхонь і тому є покриттям. Основні співвідношення плоскої задачі подано в [4, 5].

Нехай пластина $2b \times 2a$ має в центрі, що збігається з початком координат, круговий отвір радіусом r (рис. 2). Віднесемо її до декартової системи координат Ox_1x_2. Нехай на границях $\{(x_1,x_2)\colon x_1 \in [-d;d], x_2 = a\}$, $\{(x_1,x_2)\colon x_1 \in [-d;d], x_2 = -a\}$ пластина має покриття товщиною h. На границях $x_1 = b$, $x_1 = -b$ задана умова $\sigma_{nn} = p$. Дослідимо вплив покриття на значення коефіцієнта концентрації напружень (ККН) та розподіл напружень у пластині.

Нехай покриття відсутнє. Тоді у випадку нескінченної пластини приходимо до задачі Кірша, для якої ККН $K_T = 3$ в точках з координатами $(0,r)$, $(0,-r)$. Якщо ширина пластини a скінченна, а $b = \infty$, то K_T можна обчислити за формулою [5]

$$K_T = \left\{2 + \left(1 - \frac{r}{a}\right)^3\right\} \Big/ \left\{1 - \frac{r}{a}\right\}. \tag{9}$$

Числовий аналіз задачі здійснимо методом скінченних елементів з використанням функцій-бульбашок другого порядку апроксимації [7, 8]. В рамках запропонованого підходу

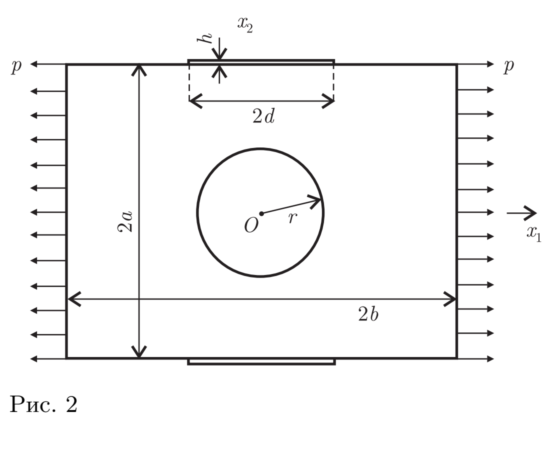

Рис. 2

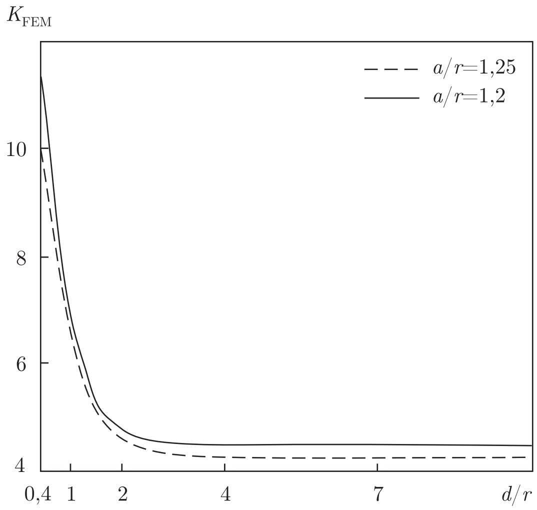

Рис. 3

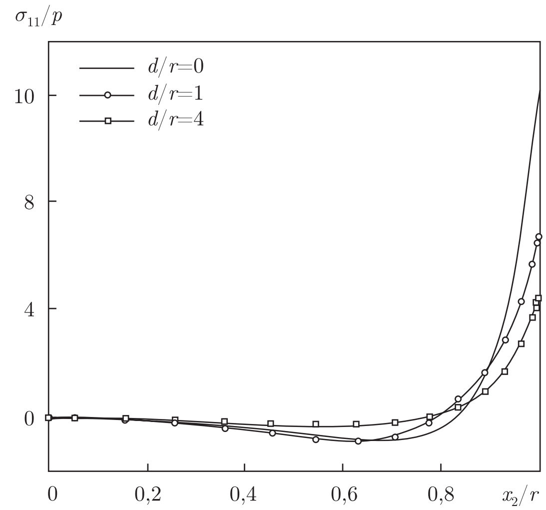

Рис. 4

покриття розглядаємо як відрізок серединної прямої, наділений відповідними властивостями: товщиною покриття, модулем Югна та коефіцієнтом Пуассона. Застосовуючи головні умови спряження, формуємо єдину систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Вважаємо, що $b/r = 10$, $E_1/p = 17000$, $\nu_1 = 0{,}42$, $E_2/p = 397000$, $\nu_2 = 0{,}28$, де E_1, ν_1 — механічні характеристики матеріалу пластини, E_2, ν_2 — покриття. Числове дослідження здійснимо для області Ω, яка займає першу чверть декартової системи координат Ox_1x_2, а на границях $\{(x_1, x_2)\colon x_1 \in [r; b], x_2 = 0\}$, $\{(x_1, x_2)\colon x_1 = 0, x_2 \in [r; a]\}$ задамо умови симетрії $u_n = 0$, $\sigma_{nt} = 0$. Аналіз проведемо на поділах, для яких контур частини отвору, що належить Ω, поділено на 15 елементів однакової довжини.

Нехай $K_{FEM} = \max\limits_{\Omega} \sigma_{11}/p$ — ККН, отриманий з числових результатів. На рис. 3 подано залежність K_{FEM} від d/r для випадку $r/h = 50$. Суцільна лінія ілюструє результати, одержані для пластини, розміри якої задовольняють співвідношення $a/r = 1{,}2$, штрихова — для пластини $a/r = 1{,}25$. Відзначимо, що відносна похибка K_{FEM} порівняно з K, який обчислений за формулою (9), за відсутності покриття, у випадку $a/r = 1{,}25$ дорівнює 3,1% та 2,6% у випадку $a/r = 1{,}2$. Бачимо, що за допомогою покриття можна істотно зменшити ККН. Значне зменшення досягається вже для $d/r = 1$. Оптимальне співвідношення між довжиною покриття та коефіцієнтом концентрації напружень отримуємо, коли $3 \leqslant d/r \leqslant 4$, причому збільшення довжини покриття не приводить до значної зміни ККН.

На рис. 4 зображено розподіл напружень σ_{11}/p на круговому отворі $(a/r = 1{,}2)$ для різних відношень d/r. Як свідчать результати, напруження набувають найменших значень у випадку $d/r = 4$.

Таким чином, наявність покриття для пластини з отвором дає змогу зменшити ККН.

Запропонований підхід слід використовувати, коли товщина включення (покриття) є значно меншою за розміри масивної частини, і для включення виконуються припущення безмоментної теорії.

1. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. – Москва: Наука, 1976. – 512 с.
3. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – Москва: Мир, 1985. – 590 с.

4. *Савула Я., Винницька Л.* Числовий аналіз напружено-деформованого стану порожнистого циліндра з тонким включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2007. – **6**. – С. 54–65.
5. *Винницька Л., Савула Я.* Напружено-деформований стан пружного тіла з тонким включенням // Там само. – 2008. – **7**. – С. 21–29.
6. *Петерсон Р.* Коэффициенты концентрации напряжений. – Москва: Мир, 1977. – 302 с.
7. *Szabo B., Babuska I.* Finite element analysis. – New York: Wiley, 1991. – 368 p.
8. *Adjerid S., Aiffa M., Flaherty J. E.* Hierarchical finite element bases for triangular and tetrahedral elements // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2001. – **190**. – P. 2925–2941.

Львівський національний університет ім. Івана Франка
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 19.01.2009

L. I. Vynnytska, Academician of the NAS of Ukraine **Ya. M. Hryhorenko,**
Ya. G. Savula

A heterogeneous mathematical model of elastic body with thin bending compliant inclusion

A heterogeneous mathematical model of elastic body with thin inclusion is stated. The membrane shell theory is used for the modeling of a stress-strain state of the inclusion. A stress-strain state of the matrix is described by the equations of elasticity theory. Numerical results are represented for the plane problem which describes the stretching of a plate with circular hole. The influence of a thin coating on the stress concentration factor and the distribution of stresses in the plate is investigated.