

А. А. Каминский, В. Н. Бастун

Прогнозирование размеров пластической зоны у вершины трещины в ортотропных металлических материалах

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

Викладено підхід до прогнозування розмірів пластичної зони біля верхівки тріщини в ортотропних металевих матеріалах з ізотропно-кінематичним зміцненням залежно від ступеня анізотропії. Розглянуто випадок деформаційної анізотропії стосовно тріщини нормального відриву, поперечного та поздовжнього зсуву. Як приклад, наведено результати розрахунку довжини пластичної зони на подовженні тріщини нормального відриву в матеріалі, анізотропія якого зумовлена зміцненням при пластичному деформуванні шляхом одновісного розтягу.

Во многих элементах конструкций в процессе изготовления и эксплуатации возникают дефекты типа трещин. При этом в окрестности вершины трещины образуется пластическая зона, длина которой входит в эффективную длину трещины, используемую в расчетах величины критической нагрузки и остаточного ресурса конструкции.

Одним из факторов, оказывающих существенное влияние на размеры пластической зоны в анизотропных материалах, является вид условия пластичности, который зависит от характера и степени анизотропии. В случае, когда анизотропия обусловлена упрочнением материала в результате пластического деформирования, имеющего место в ряде технологических процессов изготовления конструкций, таких, например, как обработка давлением, экспандирование труб, гидроопрессовка оболочек, характер и степень анизотропии определяются режимами пластического деформирования. Влияние степени деформационной анизотропии на форму и размеры пластической зоны в случае материала с кинематическим упрочнением и трещины нормального отрыва исследовано в работах [1, 2], а влияние вида условия пластичности — в [3, 4].

В настоящей работе рассматривается приближенный подход к оценке размеров пластической зоны у вершины трещин нормального отрыва (mode 1), поперечного (mode II) и продольного (mode III) сдвига в ортотропных металлических материалах с изотропно-кинематическим упрочнением в зависимости от степени анизотропии. Предполагается, что анизотропия имеет деформационное происхождение.

Построение основных уравнений. Согласно [3], уравнения, описывающие пластическую зону у вершины трещины, получим, подставляя значения компонент тензора напряжений $\{\sigma_{ij}\}$ ($i, j = 1, 2, 3$), возникающих в окрестности вершины трещины, в условие пластичности и решая полученные выражения относительно радиуса-вектора точек, расположенных на границе пластической зоны. Условие пластичности ортотропного материала, упрочнение которого происходит в соответствии с гипотезой изотропно-кинематического

типа, в ортогональной системе координат 1, 2, 3 имеет следующий вид [5, 6]:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) - \frac{2}{3}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33}) - \\ & - 2\sqrt{\frac{2}{3}}a_1\sigma_{11} + \sqrt{2}\left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} - a_2\right)\sigma_{22} + \sqrt{2}\left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_2\right)\sigma_{33} + a^2 - R^2 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $a = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$ и R — параметры деформационного упрочнения, являющиеся инвариантными к виду напряженного состояния функциями интенсивности накопленных пластических деформаций $\varepsilon_i^p = (2/3e_{ij}^p e_{ij}^p)^{1/2}$. Здесь e_{ij}^p — компоненты девиатора накопленных пластических деформаций. Предполагается, что в исходном (недеформированном) состоянии материал изотропен и наступление текучести описывается условием постоянства энергии формоизменения. В этом случае $a_1 = a_2 = 0$ и $R = R_{(0)} = \sqrt{2/3}\sigma_{T(0)}$, где $\sigma_{T(0)}$ — предел текучести материала в исходном состоянии. При этом условие пластичности в форме (1) приобретает вид условия Генки–Мизеса. Условие пластичности в форме (1) геометрически интерпретируется в пятимерном девиаторном пространстве $\{S_i\}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) [7] сферой

$$(S_1 - a_1)^2 + (S_2 - a_2)^2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2 = R^2 \quad (2)$$

с координатами центра a_1 и a_2 и радиусом R . При этом степень анизотропии материала будем характеризовать величиной отношения a/R [8].

Полагаем, что деформирование материала осуществляется путем нагружения по прямолинейной траектории

$$\frac{S_1}{l_1} = \frac{S_2}{l_2}, \quad (3)$$

находящейся в плоскости $S_1 - S_2$ пространства $\{S_i\}$. Заметим, что этой траектории соответствует прямолинейная траектория нагружения в пространстве тензора напряжений $\{\sigma_{ij}\}$. Входящие в равенство (3) значения l_1 и l_2 являются направляющими косинусами траектории нагружения, которые связаны с компонентами тензора напряжений $\{\sigma_{ii}\}$ соотношениями [2]

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{33})^{1/2}}; \\ l_2 &= \frac{\sqrt{3}(\sigma_{22} - \sigma_{33})}{2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{33})^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно [5], имеем:

$$a_1 = al_1; \quad a_2 = al_2. \quad (5)$$

Предполагается, что функции $a = a(\varepsilon_i^p)$ и $R = R(\varepsilon_i^p)$ известны. Методика их определения приведена в [5, 6].

Таким образом, входящие в условие пластичности (1) параметры a_1 , a_2 и R определяются с помощью соотношений (4) и (5) в зависимости от ориентации траектории нагружения, обусловившего анизотропию материала, и достигнутого при этом уровня интенсивности пластических деформаций ε_i^p .

Рассмотрим три основных типа трещин: нормального отрыва, поперечного и продольного сдвига.

Трещина нормального отрыва. Плоское напряженное состояние. Компоненты тензора напряжений $\{\sigma_{ij}^T\}$ в окрестности вершины трещины равны [3]

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^T &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}\right); & \sigma_{22}^T &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right); \\ \sigma_{12}^T &= \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}; & \sigma_{33}^T &= \sigma_{23}^T = \sigma_{13}^T = 0,\end{aligned}\quad (6)$$

где K_1 — коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва; r и θ — радиус-вектор и полярный угол рассматриваемой точки, соответственно. Здесь и далее верхний индекс “Т” означает локальное напряженное состояние у вершины трещины. Полагаем, что направления координатных осей тензоров напряжений $\{\sigma_{ij}^T\}$ и $\{\sigma_{ij}\}$ совпадают.

Подставляя соотношения (6) в условие пластичности (1) и решая полученное выражение относительно r (при этом рассматриваемая точка будет принадлежать границе пластической зоны), с учетом обозначения $r = r_1^p$ получим:

$$\begin{aligned}r_1^p &= \frac{K_1^2}{8\pi(a^2 - R^2)^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} a_1 \left(1 + 3 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + a_2 \left(\sqrt{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \left(\left[\frac{2}{3} a_1 \left(1 + 3 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + a_2 \left(\sqrt{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \right]^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{8}{3} (a^2 - R^2) \left[1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{3\theta}{2}\right) \right] \right)^{1/2} \right\}^2.\end{aligned}\quad (7)$$

При этом, полагая $\theta = 0$, запишем длину пластической зоны на продолжении трещины

$$r_1^p|_{\theta=0} = \frac{K_1^2}{4\pi(a^2 - R^2)^2} \left[\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_2 \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_2\right)^2 - \frac{4}{3}(a^2 - R^2)} \right]^2.\quad (8)$$

В случае изотропного материала (при этом $a_1 = a_2 = 0$ и $R = \sqrt{2/3}\sigma_{T(0)}$) приходим к известному равенству [3]

$$r_{1(0)}^p = \frac{K_1^2}{2\pi\sigma_{T(0)}^2}.\quad (9)$$

Здесь и далее знак перед корнем (+ или −) выбирается в зависимости от ориентации трещины относительно осей анизотропии таким образом, чтобы длина пластической зоны на продолжении трещины была минимальной при наибольшем значении предела текучести в направлении нормали к трещине.

Плоская деформация. В случае плоской деформации к соотношениям (6) добавляется компонента

$$\sigma_{33}^T = \mu(\sigma_{11}^T + \sigma_{22}^T),\quad (10)$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Подставляя соотношения (6) и (10) в условие пластичности (1) и решая полученное выражение относительно r , с учетом обозначения $r = r_2^p$ получим:

$$r_2^p = \frac{K_1^2}{4\pi(a^2 - R^2)^2} \left\{ \frac{2}{3} a_1 \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} - a_2 \right) \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_2 \right) \mu \cos \frac{\theta}{2} \pm \left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}} a_1 \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} - a_2 \right) \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + 2 \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_2 \right) \mu \cos \frac{\theta}{2} \right]^2 - \right. \\ \left. \left. - \frac{4}{3} \cos^2 \frac{\theta}{2} (a^2 - R^2) \left[\left(1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 4\mu(\mu - 1) \right] \right)^{1/2} \right\}^2. \quad (11)$$

При этом длина пластической зоны в направлении движения трещины будет равна

$$r_2^p|_{\theta=0} = \frac{K_1^2}{4\pi(a^2 - R^2)^2} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} a_1 - a_2 + 2 \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_1 \right) \mu \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left[\sqrt{3} a_1 - a_2 + 2 \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_2 \right) \mu \right]^2 - \frac{4}{3} (a^2 - R^2) [1 + 4\mu(\mu - 1)]} \right\}^2. \quad (12)$$

В случае изотропного материала приходим к известному равенству [3]

$$r_{2(0)}^p = \frac{K_1^2}{2\pi\sigma_{T(0)}^2} (1 - 2\mu)^2. \quad (13)$$

Трещина поперечного сдвига. Компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины равны

$$\sigma_{11}^T = \frac{K_{11}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}; \\ \sigma_{22}^T = -\frac{K_{11}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right); \\ \sigma_{33}^T = \mu(\sigma_{11}^T + \sigma_{22}^T); \\ \sigma_{12}^T = \frac{K_{11}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right); \\ \sigma_{21}^T = \sigma_{13}^T = 0, \quad (14)$$

где K_{11} — коэффициент интенсивности напряжений для трещины поперечного сдвига.

Подставляя соотношения (14) в условие пластичности (1) и решая полученное выражение относительно r (при этом полагаем $r = r_3^p$), получим:

$$r_3^p = \frac{K_{11}^2}{4\pi(a^2 - R^2)^2} \left\{ \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} a_1 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} - a_2 \right) \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2\mu \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_2 \right) \left] \pm \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} a_1 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} - a_2 \right) \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 2\mu \left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_2 \right) \right]^2 - \frac{4}{3} (a^2 - R^2) \left[\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{3\theta}{2} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)^2 + 4\mu^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \mu \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)^2 \right] \right)^{1/2} \right\}^2. \tag{15}
\end{aligned}$$

Длина пластической зоны на продолжении трещины равна

$$r_3^p|_{\theta=0} = \frac{K_{11}^2}{\pi(a^2 - R^2)}. \tag{16}$$

В случае изотропного материала

$$r_{3(0)}^p = \frac{3}{2} \frac{K_{11}^2}{\pi \sigma_{T(0)}^2}. \tag{17}$$

Трещина продольного сдвига. Компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины равны

$$\sigma_{13}^T = -\frac{K_{111}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}; \quad \sigma_{23}^T = \frac{K_{111}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}; \quad \sigma_{11}^T = \sigma_{22}^T = \sigma_{33}^T = \sigma_{12}^T = 0, \tag{18}$$

где K_{111} — коэффициент интенсивности напряжений для трещины продольного сдвига.

Подставляя соотношения (18) в условие пластичности (1) и решая полученное выражение относительно r (при этом полагаем $r = r_4^p$), получим:

$$r_4^p = \frac{K_{111}^2}{\pi(a^2 - R^2)} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right). \tag{19}$$

Тогда длина пластической зоны на продолжении трещины будет равна

$$r_4^p|_{\theta=0} = -\frac{K_{111}^2}{\pi(a^2 - R^2)}, \tag{20}$$

а в случае изотропного материала имеем

$$r_{4(0)}^p = \frac{3K_{111}^2}{2\pi \sigma_{T(0)}^2}. \tag{21}$$

Числовой пример. В качестве примера использования приведенных выше формул определим длину пластической зоны на продолжении трещины нормального отрыва при

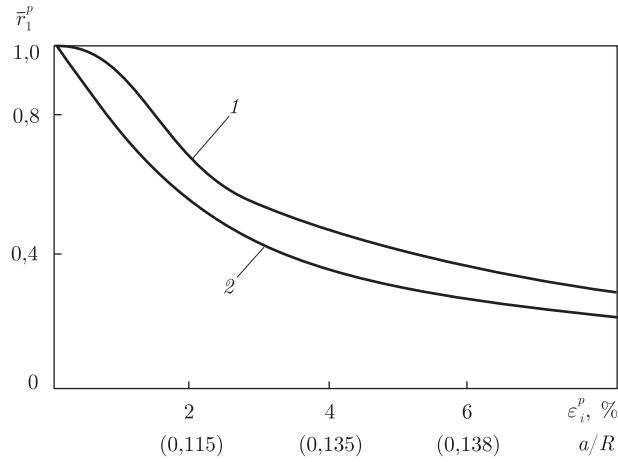


Рис. 1. Графики зависимости длины пластической зоны \bar{r}_1^p на продолжении трещины от степени анизотропии материала a/R

плоском напряженном состоянии в зависимости от величины интенсивности накопленных пластических деформаций ε_i^p и степени анизотропии, характеризуемой отношением a/R . Материал — сталь аустенитного класса 1X18H10T, упрочнение которой описывается гипотезой изотропно-кинематического типа [5, 6]. Деформирование осуществлено путем одноосного растяжения в направлении оси 1 до разных уровней пластической деформации $\varepsilon_1^p = \varepsilon_i^p$, в результате чего материал стал ортотропным. При этом, согласно (4), направляющие косинусы будут равны: $l_1 = 1$, $l_2 = 0$. Тогда $a_1 = a$, $a_2 = 0$. Функции $a = a(\varepsilon_i^p)$ и $R = R(\varepsilon_i^p)$ для стали 1X18H10T приведены в [6].

Заметим, что в рассматриваемом случае значения a и R могут быть определены из опытов по ортогональному эффекту Баушингера в зависимости от величины пределов текучести σ_{1T} и σ_{2T} в направлении осей 1 и 2 по формулам [6]:

$$a = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\sigma_{1T}^2 - \sigma_{2T}^2}{2\sigma_{1T} + \sigma_{2T}}}; \quad R = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{1T} - a. \quad (22)$$

Рассмотрим два случая ориентации трещины — в направлении оси 1 и в перпендикулярном направлении. В исходном (недеформированном) состоянии материал изотропен и имеет следующие характеристики: $\sigma_{T(0)} = 200$ МПа, $a_0 = 0$, $R_0 = 163$ МПа. Значения пределов текучести σ_{1T} и σ_{2T} , а также параметров a и R при разных уровнях ε_i^p приведены в табл. 1.

На рис. 1 представлены графики зависимостей $\bar{r}_1^p(\varepsilon_i^p)$ (здесь $\bar{r}_1^p = r_1^p/r_{1(0)}^p$), построенных по формуле (8). В скобках по оси абсцисс указаны соответствующие значения a/R . Здесь кривая 1 соответствует ориентации трещины в направлении оси 1, а кривая 2 — в перпен-

Таблица 1. Параметры деформационной анизотропии стали 1X18H10T

ε_i^p , %	σ_{1T} , МПа	σ_{2T} , МПа	a , МПа	R , МПа
0,5	220	200	11	169
1,1	253	225	15	191
1,6	275	240	19	204
2,5	310	260	26	219
4,1	339	295	34	253
7,1	432	350	43	310

дикулярном направлении. Как видно, в случае ориентации трещины в направлении оси 1 длина пластической зоны на продолжении трещины в области малых деформаций ε_i^p (0, ... , 0,5%) практически не изменяется, а с увеличением ε_i^p монотонно снижается. При ориентации трещины в направлении оси 2 наблюдается монотонное снижение величины \bar{r}_1^p .

Таким образом, размеры пластической зоны у вершины трещин трех рассмотренных типов для материала с изотропно-кинематическим упрочнением представлены в виде функций параметров a и R , характеризующих деформационную анизотропию. Полученные соотношения позволяют прогнозировать размеры пластической зоны в зависимости от режимов пластического деформирования материала на стадии изготовления конструкций.

1. Бастун В. Н. О влиянии деформационной анизотропии на величину пластической зоны у вершины трещины нормального отрыва // Пробл. прочности. – 1990. – № 1. – С. 73–76.
2. Бастун В. Н. О пластической зоне в материалах с деформационной анизотропией, обусловленной нагружением по пространственным прямолинейным траекториям // Там же. – 1997. – № 6. – С. 21–27.
3. Броек О. Основы механики разрушения. – Москва: Высш. шк., 1980. – 368 с.
4. Галатенко Г. В. Развитие модели трещины Дагдейла на основе классических поверхностей текучести // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 6. – С. 36–42.
5. Бастун В. Н., Каминский А. А. Прикладные проблемы механики процессов деформационного упрочнения конструкционных металлических материалов // Там же. – 2005. – 41, № 10. – С. 12–52.
6. Каминский А. А., Бастун В. Н. Деформационное упрочнение и разрушение металлов при переменных процессах нагружения. – Киев: Наук. думка, 1985. – 167 с.
7. Ильюшин А. А. Пластичность. Общая математическая теория. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
8. Бастун В. М., Белокуров В. М. Спосіб визначення коефіцієнта деформаційної анизотропії металевих матеріалів. – Патент України на корисну модель № 20003. – 2007. – Бюл. № 1.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.11.2008

A. A. Kaminsky, V. N. Bastun

Prediction of sizes of a plastic zone near a crack tip in orthotropic metallic materials

An approach to predicting the sizes of a plastic zone near a crack tip in orthotropic metallic materials with isotropic-kinematic hardening depending on the anisotropy degree is outlined. The case of strain-hardening anisotropy as applied to the cracks of modes I, II, and III is considered. As an example, the length of the plastic zone at the continuation of a mode-I crack is analyzed depending on the degree of anisotropy caused by the hardening of a material under plastic deformation caused by a uniaxial tension.