Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2009

МАТЕМАТИКА

УДК 539.3+531.36

С. В. Бабенко, В. И. Слынько

Об устойчивости решений динамических уравнений на основе функций разрывного типа

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Досліджено стійкість розв'язків динамічних рівнянь на часовій шкалі за допомогою функцій розривного типу. Встановлено нові достатні умови стійкості та асимптотичної стійкості розв'язків динамічних рівнянь.

Для анализа устойчивости решений динамических уравнений в работах [1, 2] применяется прямой метод А. М. Ляпунова [1]. В этих работах используются скалярные и матричнозначные функции Ляпунова, определенные на плотных справа подмножествах временной шкалы $\mathbb{T}$. В настоящем сообщении предложено расширение класса вспомогательных функций Ляпунова, позволяющее ослабить требования к гладкости этих функций по времени.

Постановка задачи. Рассматривается динамическое уравнение

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), \qquad f(t, 0) = 0, \tag{1}$$

заданное на шкале $\mathbb{T}$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, и под шкалой понимается произвольное непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R}$. Будем считать, что f удовлетворяет предположениям H_1–H_4 работы [3], которые обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши для этого уравнения. Предположим также, что решение $x = 0$ уравнения (1) является изолированным, и поставим вопрос о его устойчивости.

Основной результат. Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая неограниченная последовательность точек из $\mathbb{T}$. Для решения задачи об устойчивости нулевого решения уравнения (1) рассмотрим нестационарную функцию $v\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, являющуюся разрывной относительно $t \in \mathbb{T}$.

Напомним (см. [3] и приведенную там библиогр.), что для любого $t \in \mathbb{T}$ $\sigma(t)$ обозначает оператор скачка вперед, $\rho(t)$ — оператор скачка назад, а $\mu(t) = \sigma(t) - t$ — функцию зернистости шкалы $\mathbb{T}$. Пусть $\langle t_1, t_2)$ обозначает $[t_1, t_2)$, если $t_1 < \sigma(t_1)$, и (t_1, t_2), если $t_1 = \sigma(t_1)$.

Определение 1. Функция $v(t, x)$ является разрывной относительно $t \in \mathbb{T}$ функцией, если и только если выполняются условия:

(1) $v(t,x)$ — Δ-дифференцируемая в $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$, $Q_k = \{t\colon t \in \langle \tau_k, \tau_{k+1})\}$ и локально липшицевая по x в каждом Q_k;

(2) для любой точки (τ_k, x), для которой $\rho(\tau_k) = \tau_k$, существует конечный предел $v(\tau_k - 0, x) = \lim\limits_{(t,y)\to(\tau_k - 0, x)} v(t,y)$.

Для t, рассеянных слева, дополнительно определим: $v(t-0,x) = v(\rho(t),x)$. Для $t \in Q$ Δ-производная v вдоль решения $x(t)$ уравнения (1) определяется так [3]:

$$v^{\Delta}\big|_{(1)} = \begin{cases} \overline{\lim}\{[v(t+h, x(t+h)) - v(t, x(h))]h^{-1}\colon h \to 0, h+t \in \mathbb{T}\}, & t = \sigma(t), \\ [v(\sigma(t), x(\sigma(t))) - v(t,x)]\mu^{-1}(t), & t < \sigma(t). \end{cases}$$

Пусть $KB(\mathbb{T})$ обозначает класс разрывных относительно $t \in \mathbb{T}$ функций. Сформулируем условия устойчивости и асимптотической устойчивости решения $x = 0$ уравнения (1).

Теорема 1. *Предположим, что динамическое уравнение* (1) *такое, что существуют функция $v(t,x) \in KB(\mathbb{T})$ и функция $a(.)$ класса Хана, для которых выполняются условия:*

1) $a(\|x\|) \leqslant v(t,x)$ при всех $(t,x) \in \mathbb{T} \times \Omega$;

2) $v^{\Delta}\Big|_{(1)}(t,x) \leqslant 0$ при всех $(t,x) \in Q \times \Omega$;

3) $v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(\tau_k - 0, x(\tau_k - 0)) \leqslant 0$ при всех $(k, x(\tau_k)) \in \mathbb{N} \times \Omega$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытая связная окрестность точки $x = 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1) *устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ сферу $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| = \varepsilon\}$, целиком лежащую в Ω, и обозначим $l = a(\varepsilon)$.

Поскольку функция $v(t,x)$ непрерывная в точке $x = 0$, то существует δ-окрестность ($\delta < \varepsilon$) этой точки такая, что $0 \leqslant v(t,x) < l$, если $\|x\| < \delta$.

Выберем произвольное $t_0 \geqslant 0$ и рассмотрим решение $x = x(t)$ динамического уравнения (1) с начальным условием $\|x(t_0)\| < \delta$. Тогда это решение не покинет шар $B(0,\varepsilon)$, т. е.

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad t \geqslant t_0. \tag{2}$$

Действительно, в точке $t = t_0$ условие (2) выполняется: $\|x(t_0)\| < \delta \leqslant \varepsilon$.

Пусть $t_1 > t_0$ — значение $t \in \mathbb{T}$, при котором выполняется неравенство, противоположное (2). Исследуем функцию $v(t, x(t))$. Обозначив $\underline{k} = \min\{k\colon \tau_k \geqslant t_0\}$ и $\overline{k} = \max\{k\colon \tau_k \leqslant t\}$, для $v(t,x(t))$ имеем представление

$$v(t,x(t)) = v(t_0, x(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{\rho(\tau_{\underline{k}})} v^{\Delta}(s,x(s))\Delta s + \int\limits_{\tau_{\underline{k}}}^{\rho(\tau_{\underline{k}+1})} v^{\Delta}(s,x(s))\Delta s + \cdots +$$
$$+ \int\limits_{\tau_{\overline{k}}}^{t} v^{\Delta}(s,x(s))\Delta s + \sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}} (v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(\tau_k - 0, x(\tau_k - 0))), \tag{3}$$

которое следует из определения интеграла по шкале (см. [4]).

В силу условий *2* и *3* данной теоремы, из (3) имеем, что $v(t_0, x(t_0)) \geqslant v(t_1, x(t_1))$ и тогда

$$l > v(t_0, x(t_0)) \geqslant v(t_1, x(t_1)) \geqslant a(\|x(t_1)\|) \geqslant a(\varepsilon) = l,$$

что невозможно. Таким образом, $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

Теорема 2. *Предположим, что динамическое уравнение* (1) *такое, что существуют функция* $v(t,x) \in KB(\mathbb{T})$ *и функции* $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ *и* $c(\cdot)$ *класса Хана, для которых выполняются условия:*

1) $a(\|x\|) \leqslant v(t,x) \leqslant c(\|x\|)$ *при всех* $(t,x) \in \mathbb{T} \times \Omega$*;*

2) $v^{\Delta}\big|_{(1)}(t,x) \leqslant -b(\|x\|)$ *при всех* $(t,x) \in Q \times \Omega$*;*

3) $v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(\tau_k - 0, x(\tau_k - 0)) \leqslant -b(\|x(\tau_k - 0)\|)\mu(\rho(\tau_k))$ *при всех* $(k, x(\tau_k - 0)) \in \mathbb{N} \times \Omega$*;*
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— открытая связная окрестность точки* $x = 0$.
Тогда решение $x = 0$ *уравнения* (1) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Очевидно, что выполнение условий *1–3* гарантирует по теореме 1 устойчивость тривиального решения уравнения (1). Следовательно, для доказательства теоремы 2 нужно показать, что для любого решения $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ существует δ_0 такое, что из условия $\|x_0\| < \delta_0$ следует предельное равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$.

Рассмотрим $t \geqslant r$ — произвольные элементы шкалы $\mathbb{T}$ и докажем, что функция $v(t,x(t))$ монотонно убывает. Пусть $\underline{k} = \min\{k\colon \tau_k \geqslant r\}$ и $\overline{k} = \max\{k\colon \tau_k \leqslant t\}$. Тогда для $v(t,x(t))$ имеет место формула (3), из которой посредством условий *2* и *3* получаем неравенство

$$v(t,x(t)) \leqslant v(r,x(r)) - \int\limits_{r}^{\rho(\tau_{\underline{k}})} b(\|x(s)\|)\Delta s - \int\limits_{\tau_{\underline{k}}}^{\rho(\tau_{\underline{k}+1})} b(\|x(s)\|)\Delta s - \cdots -$$

$$- \int\limits_{\tau_{\overline{k}}}^{t} b(\|x(s)\|)\Delta s - \sum_{k=\underline{k}}^{\overline{k}} b(\|x(\tau_k - 0)\|)\mu(\rho(\tau_k)). \tag{4}$$

Обозначим $M = \{\tau_k\colon \underline{k} \leqslant k \leqslant \overline{k}\}$. Очевидно, что M представимо в виде $M = M_{ld} \bigsqcup M_{ls}$, где M_{ld} суть множество плотных слева точек из M, а M_{ls} — разрывных слева. Исходя из этого представления и свойств интеграла по шкале [4], сумму S в неравенстве (4) можно преобразовать так:

$$S = \sum_{\tau_k \in M_{ld}} b(\|x(\tau_k - 0)\|)\mu(\rho(\tau_k)) + \sum_{\tau_k \in M_{ls}} b(\|x(\tau_k - 0)\|)\mu(\rho(\tau_k)) =$$

$$= \sum_{\tau_k \in M_{ls}} b(\|x(\tau_k - 0)\|)\mu(\rho(\tau_k)) = \sum_{\tau_k \in M_{ls}} \int\limits_{\rho(\tau_k)}^{\tau_k} b(\|x(s)\|)\Delta s.$$

Отсюда заключаем, что если $\rho(\tau_k) = \tau_k$, то $b(\|x(\tau_k - 0)\|)\mu(\rho(\tau_k)) = 0$, а сумма интегралов $\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_k)} b(\|x(s)\|)\Delta s$ и $\int\limits_{\tau_k}^{\rho(\tau_{k+1})} b(\|x(s)\|)\Delta s$ равна $\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_{k+1})} b(\|x(s)\|)\Delta s$. Если $\rho(\tau_k) < \tau_k$, то $\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\rho(\tau_k)} b(\|x(s)\|)\Delta s + b(\|x(\tau_k - 0)\|)\mu(\rho(\tau_k)) = \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} b(\|x(s)\|)\Delta s$. Заменяя в (4) каждую указанную сумму на равный ей интеграл, получаем в конечном итоге неравенство

$$v(t,x(t)) \leqslant v(r,x(r)) - \int\limits_{r}^{t} b(\|x(s)\|)\Delta s, \tag{5}$$

из которого, в силу неотрицательности $b(\cdot)$, имеем, что $v(t,x(t)) \leqslant v(r,x(r))$. То есть функция $v(t,x(t))$ монотонно убывает на $[t_0,\infty)$ и, будучи ограниченной снизу, имеет конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} v(t,x(t)) = \inf_t v(t,x(t)) = \alpha \geqslant 0. \tag{6}$$

Если в (6) предположить, что $\alpha > 0$, то существует β такое, что

$$\|x(t)\| \geqslant \beta > 0 \qquad \text{при} \qquad t \geqslant t_0. \tag{7}$$

Действительно, если это не так, то существует неограниченная последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек шкалы такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x(t_k) = 0$. Тогда из условия *1* теоремы получаем неравенства

$$\lim_{k\to\infty} a(\|x(t_k)\|) \leqslant \lim_{k\to\infty} v(t_k,x(t_k)) \leqslant \lim_{k\to\infty} c(\|x(t_k)\|),$$

которые, в силу непрерывности a и c и равенств $a(0) = c(0) = 0$, приводят к равенству $\lim\limits_{k\to\infty} v(t_k,x(t_k)) = 0$, противоречащему положительности α.

Таким образом, если $\alpha > 0$, то выполняется (7) и можно предполагать также, что $\|x(t)\| < \delta_0$, поскольку решение $x = 0$ динамического уравнения (1) устойчиво по Ляпунову.

Обозначим $l = b(\beta)$. Тогда из (7) и монотонности функции b очевидно следует, что для всех $s \in [t_0,t]$ справедливо неравенство $b(\|x(s)\|) \geqslant l > 0$, которое совместно с (5) приводит к оценке

$$v(t,x(t)) \leqslant v(t_0,x(t_0)) - l(t-t_0). \tag{8}$$

Из (8) следует, что существует $\bar{t} \geqslant t_0$ такое, что $v(\bar{t},x(\bar{t})) < 0$, а это противоречит равенству (6). Таким образом, предположение о положительности α неверно, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} v(t,x(t)) = \alpha = 0$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\gamma = a(\varepsilon)$. Поскольку $\lim\limits_{t\to\infty} v(t,x(t)) = 0$, то существует $T = T(\varepsilon) > t_0$ такое, что $v(T,x(T)) < \gamma$. Так как функция $v(t,x(t))$ монотонно убывает, то

$$v(t,x(t)) < \gamma \qquad \text{при} \qquad t \geqslant T, \tag{9}$$

откуда, как несложно показать, при $t > T$ следует неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$.

Действительно, если для некоторого $t_1 > T$ выполняется неравенство $\|x(t_1)\| \geqslant \varepsilon$, то, учитывая равенство $a(\varepsilon) = \gamma$ и (9), мы имели бы

$$\gamma > v(t_1,x(t_1)) \geqslant a(\|x(t_1)\|) \geqslant a(\varepsilon) = \gamma,$$

что невозможно. Поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$, что и требовалось доказать.

Предположение 1. *Существует число $T > 0$ и положительная функция $l \in C_{rd}(\mathbb{T})$ такие, что $\tau_{k+1} - \tau_k \leqslant T$, $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} l(s)\Delta s < \infty$, и $f(t,x)$ является липшицевой по x в некоторой окрестности нуля W, при всех $t \in \mathbb{T}$:*

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leqslant l(t)\|x_1 - x_2\|.$$

Теорема 3. *Предположим, что динамическое уравнение* (1) *такое, что существуют функция* $v(t,x) \in KB(\mathbb{T})$ *и функции* $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ *и* $c(\cdot)$ *класса Хана, для которых выполняются условия:*

1) $0 \leqslant v(t,x) \leqslant c(\|x\|)$ *при всех* $(t,x) \in \mathbb{T} \times \Omega$*;*

2) $v(\tau_k,x) \geqslant a(\|x\|)$ *при всех* $(k,x) \in \mathbb{N} \times \Omega$*;*

3) $v^{\Delta}\Big|_{(1)}(t,x) \leqslant 0$ *при всех* $(t,x) \in Q \times \Omega$*;*

4) $v(\tau_k, x(\tau_k)) - v(\tau_k - 0, x(\tau_k - 0)) \leqslant -b(\|x(\tau_k - 0)\|)$ *при всех* $(k, x(\tau_k - 0)) \in \mathbb{N} \times \Omega$*;*
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— открытая связная окрестность точки* $x = 0$*.*
Тогда решение $x = 0$ *уравнения* (1) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

П р и м е р . Рассмотрим линейное динамическое уравнение, заданное на шкале $\mathbb{T}_{\{\sigma_n\}} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty}[k, k + \sigma_k]$, $\sigma_k \in [0,1]$:

$$x^{\Delta} = \alpha(t)x + \beta(t)y, \qquad y^{\Delta} = -\beta(t)x + \alpha(t)y, \tag{10}$$

где α, $\beta \in C_{rd}(\mathbb{T}_{\{\sigma_n\}}, \mathbb{R})$ — 1-периодические функции, удовлетворяющие при всех $t \in \mathbb{T}_{\{\sigma_n\}}$ условию $(1 + \mu(t)\alpha(t))^2 + \mu^2(t)\beta^2(t) \neq 0$, которое означает регрессивность матрицы правой части (10).

Исследуем устойчивость решения $x = y = 0$ уравнения (10) при помощи разрывных относительно $t \in \mathbb{T}$ функций. Положив $v(t,x,y) = p(t)(x^2 + y^2)$, где $p(t)$ на полусегменте $[\tau_k, \tau_{k+1})$ определяется по формуле

$$p(t) = e_{\ominus\varphi}(t, \tau_k) - q\int\limits_{\tau_k}^{t} e_{\ominus\varphi}(t,s)\Delta s,$$

в которой $\tau_k = k + \sigma_k$; $e_{\ominus\varphi}$ — экспоненциальная функция динамического уравнения $u^{\Delta} = \ominus\varphi u$; $\varphi(t) = 2\alpha(t) + \mu(t)(\alpha^2(t) + \beta^2(t))$; q — положительная константа, находим условия устойчивости исследуемого решения в виде

$$[1 + 2\max\{(1-\overline{\sigma})M_{\alpha}, (1-\underline{\sigma})M_{\alpha}\} + (1-\underline{\sigma})^2(m_{\alpha}^2 + \max\{m_{\beta}^2, M_{\beta}^2\})]e^{\alpha_0} < 1,$$

где

$$\underline{\sigma} = \inf_{k\in\mathbb{N}_0} \sigma_k, \qquad \overline{\sigma} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \sigma_k, \qquad m_{\alpha} = \inf_{k\in\mathbb{N}_0} \alpha(-\sigma_k), \qquad M_{\alpha} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \alpha(-\sigma_k),$$

$$m_{\beta} = \inf_{k\in\mathbb{N}_0} \beta(-\sigma_k), \qquad M_{\beta} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \beta(-\sigma_k), \qquad \alpha_0 = 2\max\left\{\int\limits_0^{\underline{\sigma}} \alpha(s)ds, \int\limits_0^{\overline{\sigma}} \alpha(s)ds\right\}.$$

1. *Hoffacker J., Tisdell C. C.* Stability and instability for dynamic equations on time scales // Comput. and Math. with Appl. – 2005. – **49**, No 9–10. – P. 1327–1334.
2. *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Об устойчивости динамических систем на временной шкале // Докл. АН. – 2007. – **413**, № 1. – С. 11–15.
3. *Bohner M., Martynyuk A. A.* Elements of Lyapunov stability theory for dynamic equations on time scale // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No 9. – P. 949–970.
4. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. – Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2001. – 358 p.
5. *Aulbach B., Hilger S.* A unified approach to continuous and discrete dynamics // Qualitative Theory of Differential Equations / Eds. Sz.-Nagy, L. Hatvani. – New York: North-Holland, 1990. – P. 37–56.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 26.12.2008

S. V. Babenko, V. I. Slyn'ko

About the stability of the solutions of dynamic equations on the basis of the discontinuous type's functions

Stability of the solutions of dynamic equations on the time scales is considered by using the functions of the discontinuous type. The new sufficient conditions of stability and asymptotic stability of the solutions of dynamic equations are obtained.