УДК 517.54

А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Р. В. Подвысоцкий

Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

Отримано нові результати про максимум добутку внутрішніх радіусів взаємно непересічних областей відносно деяких систем точок.

Оценки различных функционалов, заданных на классах взаимно неналегающих областей, представляют известное классическое направление геометрической теории функций комплексного переменного, с результатами, методами и историей развития которого можно ознакомиться в работах [1–10]. Многие результаты этого направления получены благодаря решению соответствующих экстремальных задач. Одним из важных элементов исследования экстремальных задач является теория квадратичных дифференциалов, один из ключевых результатов которой — "Основная структурная теорема" Дж. А. Дженкинса, дает полное описание глобальной структуры траекторий положительного квадратичного дифференциала на конечной римановой поверхности (см. [3]).

Новые возможности для данной теории возникли благодаря методу кусочно-разделяющего преобразования (см. [7–11]).

Большинство результатов о неналегающих областях связано, как правило, с получением оценок произведений внутренних радиусов этих областей (см. [1–11]). В работе [5] получены первые результаты для функционалов "типа суммы", которым в [12] дано дальнейшее развитие. В данной работе рассматривается новый подход к решению задач об оценке функционалов "типа суммы" на основе разделяющего преобразования, а также приводятся новые результаты, относящиеся к тематике экстремальных задач со свободными полюсами соответствующих квадратичных дифференциалов, интерес к которой в последнее время значительно возрос.

Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных и комплексных чисел соответственно, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость или сфера Римана.

Системой неналегащих областей (с. н. о.) называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \bigcap B_m = \varnothing$, $k \neq m$, $k,m = \overline{1,n}$. Произвольный набор точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $k = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, подчиненных условию

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \cdots < \arg a_n < 2\pi. \tag{1}$$

назовем n-лучевой системой точек.

Рассмотрим области

$$E_k = \{w\colon \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}, \qquad k = \overline{1,n}, \qquad E_{n+1} = E_1.$$

Пусть $\theta_k = \dfrac{1}{\pi}\arg\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $k = \overline{1,n}$, $\theta_{n+1} = \theta_1$. Ясно, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k = 2$.

При $k = \overline{1,n}$ обозначим через $\xi_k(w)$ ту ветвь многозначной аналитической функции $\xi = -i(e^{-i\arg a_k}w)^{1\backslash\theta_k}$, которая реализует однолистное и конформное отображение области E_k на правую полуплоскость.

Для удобства связную компоненту множества Q, содержащую точку b, обозначим $[Q]_b$. Будем говорить, что с. н. о. удовлетворяет дополнительному условию неналегания относительно заданного набора точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, если $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$ и при каждом $k = \overline{1,n}$ существует хотя бы одна горизонтальная прямая

$$l_k(\eta) = \{\xi\colon \operatorname{Im}\xi = \eta\}, \qquad \eta \in (-|a_k|^{1/\theta_k}, |a_{k+1}|^{1/\theta_k}),$$

не имеющая общих точек ни с множеством $\xi_k([B_k \bigcap \overline{E}_k]_{a_k})$, ни с множеством $\xi_k([B_{k+1} \bigcap \bigcap \overline{E}_k]_{a_{k+1}})$, где $\xi_k(D)$ — образ множества D при отображении ξ_k.

Внутренний радиус области $B, B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ обозначим через $r(B,a)$ (см. [7–10]).

Результаты и доказательства. Рассмотрим задачу о максимуме функционала

$$J_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|^{1/2(1/\theta_{k-1}+1/\theta_k)-1} \cdot r(B_k, a_k) \tag{2}$$

на классе всех с. н. о., удовлетворяющих дополнительному условию неналегания относительно систем точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих условию (1). Функционал (2) — это функционал "типа суммы", а задача об экстремуме этого функционала относится к разряду задач со свободными полюсами. Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \theta_k(|a_k|^{1/\theta_k} + |a_{k+1}|^{1/\theta_k}) = 4,$$

и любой с. н. о. $B_k = \{a_k\}_{k=1}^n$, удовлетворяющей дополнительному условию неналегания относительно A_n, справедливо неравенство

$$J_n \leqslant 4.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, в частности, тогда, когда точки a_k и области B_k являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}dw^2. \tag{3}$$

Доказательство. Следуя методу разделяющего преобразования (см. [7–9]), получаем соотношения

$$r(B_k, a_k) \leqslant |a_k|^{-1/2(1/\theta_{k-1}+1/\theta_k)+1} \times$$
$$\times \left[\theta_{k-i}\theta_k r(G_{k-1}^{(2)}, i|a_k|^{1/(\theta_{k-1})}) r(G_k^{(1)}, -i|a_k|^{1/\theta_k})\right]^{1/2}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

где

$$G_k^{(1)} = \xi_k([B_k \bigcap \overline{E}_k]_{a_k}) \bigcup \{\xi_k[B_k \bigcap \overline{E}_k]_{a_k}\}^*,$$

$$G_k^{(2)} = \xi_k([B_{k+1} \bigcap \overline{E}_k]_{a_{k+1}}) \bigcup \{\xi_k[B_{k+1} \bigcap \overline{E}_k]_{a_{k+1}}\}^*,$$

$\{D\}^*$ — множество, симметричное множеству D относительно мнимой оси, $\xi_k(D)$ — образ множества D при отображении $\xi_k(w)$. Ясно, что $-i|a_k|^{1/\theta_k} \in G_k^{(1)}$, а $i|a_{k+1}|^{1/\theta_k} \in G_k^{(2)}$, $k = 1, \ldots, n$.

Тогда для функционала (2) выполняются неравенства

$$J_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} [\theta_{k-1} r(G_{k-1}^{(2)}, i|a_k|^{1/\theta_{k-1}}) \cdot \theta_k r(G_k^{(1)}, -i|a_k|^{1/\theta_k})]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [\theta_{k-1} r(G_{k-1}^{(2)}, i|a_k|^{1/\theta_{k-1}}) + \theta_k r(G_k^{(1)}, i|a_k|^{1/\theta_k})] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \theta_k [r(G_k^{(1)}, -i|a_k|^{1/\theta_k}) + r(G_k^{(2)}, i|a_{k+1}|^{1/\theta_k})].$$

Сформулируем вспомогательный результат, принадлежащий А. К. Бахтину, который значительно обобщает результат работы [12].

Лемма. *Пусть a_1, $a_2 \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq a_2$, и $\mathcal{L}$ — множество всех прямых, имеющих одну и только одну точку пересечения с открытым отрезком (a_1, a_2). Тогда для произвольных областей комплексной плоскости B_1, B_2, $a_1 \in B_1$, $a_2 \in B_2$, которые удовлетворяют условию $(B_1 \bigcap l) \bigcup (B_2 \bigcap l) = \varnothing$ хотя бы для одной прямой $l \in \mathcal{L}$, выполняется неравенство*

$$r(B_1, a_1) + r(B_2, a_2) \leqslant 2|a_1 - a_2|.$$

Равенство в этом неравенстве достигается для полуплоскостей, общая граница которых есть прямая $l \in \mathcal{L}$, ортогональная отрезку (a_1, a_2).

Доказательство. Пусть B_1^0 есть компонента множества $\mathbb{C} \backslash l$, содержащая точку a_1, а B_2^0 — вторая компонента множества $\mathbb{C} \backslash l$, содержащая точку a_2. Ясно, что B_1^0 и B_2^0 — полуплоскости, удовлетворяющие условиям леммы. Тогда $B_1 \subset B_1^0$ и $B_2 \subset B_2^0$. Отсюда следует, что $r(B_1, a_1) + r(B_2, a_2) \leqslant r(B_1^0, a_1) + r(B_2^0, a_2) = 2|a_1 - a_2| \sin\theta$, где θ — угол между отрезком (a_1, a_2) и l. Отсюда следует справедливость леммы.

С учетом леммы и предыдущих оценок получим

$$J \leqslant \sum_{k=i}^{n} \theta_k (|a_k|^{1/\theta_k} + |a_{k+1}|^{1/\theta_k}) = 4.$$

Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Обозначив $d(B_k, a_k) := |a_k|^{1/2(1/\theta_{k-1} + 1/\theta_k) - 1} \cdot r(B_k, a_k)$, $k = 1, \ldots, n$, из теоремы 1 получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ — набор неотрицательных чисел, $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k = 1$. Тогда для функционала*

$$L_n = \sum_{p=0}^{n-1} \prod_{k=1}^{n} [d(B_k, a_k)]^{\beta_{k+p}},$$

где $\beta_{n+p} := \beta_p, p = \overline{1,n}$, *заданного на множестве всех с. н. о., удовлетворяющих дополнительному условию неналегания, относительно* n*-лучевых систем точек таких, что* $\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k[|a_k|^{1/\theta_k} + |a_{k+1}|^{1/\theta_k}] = 4$, *справедливо равенство*

$$L_n \leqslant 4.$$

Знак равенства достигается при условиях теоремы 1.

Частным случаем следствия 1 является следующий результат.

Следствие 2. *При условиях теоремы 1 справедливо неравенство*

$$\sqrt{d(B_1,a_1)d(B_2,a_2)} + \sqrt{d(B_2,a_2)d(B_3,a_3)} + \cdots + \sqrt{d(B_n,a_n)d(B_1,a_1)} \leqslant 4.$$

Знак равенства достигается при условиях теоремы 1.

Для n-лучевых систем точек, лежащих на окружности, получаем такой результат.

Следствие 3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *Тогда для любой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *единичной окружности, удовлетворяющей условию* (1), *и любой с. н. о., удовлетворяющей дополнительному условию неналегания относительно этой системы точек* A_n, *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant 4.$$

Знак равенства достигается при условиях теоремы 1.

Далее рассмотрим задачу о максимуме функционала

$$J_n = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

где $\{B_k\}_{k=0}^n$ — с. н. о. и $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — n-лучевая система точек, причем $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma_5 = 1{,}15$, $\gamma_6 = 1{,}3$, $\gamma_7 = 1{,}45$, $\gamma_n = 1{,}5$, $n \geqslant 8$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для каждого* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, *любого набора точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *единичной окружности и произвольной с. н. о.* $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma_n}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma_n}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k),$$

где $d_k = \exp i\dfrac{2\pi}{n}(k-1)$, $k = 1, \ldots, n$. *Для каждого фиксированного* $n \geqslant 5$ *знак равенства в этом неравенстве достигается, когда* a_k *и* B_k $(k = 1, \ldots, n)$ *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma_n)w^n + \gamma_n}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда для любой системы различных точек единичной окружности $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и любой с. н. о. $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = 1, \dots, n$, справедливо неравенство*

$$r(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} \theta_k\right]^{1/2} \frac{4^{1/n}(2n)^{3n/2}}{(n^2-1)^{n+1/n}} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2.$$

Знак равенства достигается тогда, когда точки a_k и области B_k являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-1)w^n + 1}{w^2(w^n-1)^2} dw^2.$$

Отметим, что теоремы 2 и 3 получены А. К. Бахтиным и Р. В. Подвысоцким.

Работа выполнена при частичой финансовой поддержке Государственной программы Украины 0107U002027.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5.** – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – Москва: Наука, 1975. – 336 с.
5. *Бахтина Г. П.* Об одной экстремальной задаче конформного отображения единичного круга на неналегающие области // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 5. – С. 646–648.
6. *Бахтина Г. П.* О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 21–27.
7. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168.** – С. 48–66.
8. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1 (295). – С. 3–76.
9. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учеб. пособие. – Владивосток: Изд. Дальневост. ун-та, 2003. – 116 с.
10. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **73**. – 308 с.
11. *Подвысоцкий Р. В.* Оценка произведения внутренних радиусов частично неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 7. – С. 1004–1008.
12. *Stankiewicz J., Stankiewicz Z.* On the mapping of the unit disk onto disjoining domains // Материалы III Петрозав. междунар. конф. по теории функций комплексного переменного, посвященной 100-летию Г. М. Голузина. – Петрозаводск: Изд-во Петрозав. ун-та, 2006. – С. 36.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 10.02.2009

A. K. Bakhtin, G. P. Bakhtina, R. V. Podvysotskiy

Inequalities for inner radii of nonoverlapping domains

New results on maximization of the product of inner radii of mutually nonintersecting domains with respect to some systems of points are presented.