ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2010

МЕХАНІКА

УДК 539.3

© 2010

О. Я. Григоренко, А. С. Бергульов, С. М. Яремченко

Розв'язання тривимірних крайових задач про згин прямокутних пластин

(Представлено академіком НАН України А. А. Мартинюком)

Наводиться чисельно-аналітичний підхід для дослідження напружено-деформованого стану прямокутних пластин. Задача розв'язується на основі тривимірної моделі теорії пружності. Система диференціальних рівнянь в частинних похідних зводиться до одновимірної задачі за рахунок застосування методу сплайн-колокації за двома координатними напрямками. Крайова задача для системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку розв'язувалася стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Наведені приклади розрахунків для різних граничних умов.

Прямокутні товстостінні пластини широко застосовуються в багатьох галузях сучасної техніки. Для забезпечення міцності та надійності при експлуатації відповідних конструктивних елементів дуже важливим є отримання інформації про їх напружено-деформований стан. Дослідження на основі тривимірної теорії пружності пов'язане з труднощами обчислювального характеру. Тому можна навести тільки незначну кількість наукових робіт, присвячених даному питанню [1, 2].

Нижче запропоновано ефективний чисельно-аналітичний підхід для дослідження напружено-деформованого стану прямокутних товстостінних ізотропних пластин. Підхід базується на застосуванні методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації. За допомогою першого вихідна просторова крайова задача для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних зводиться до відповідної задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язується другим методом. Підкреслимо, що до розв'язання двовимірних задач теорії оболонок та осесиметричних задач теорії пружності такий підхід використовувався, зокрема, в роботах [3–5].

Вихідні співвідношення. Для отримання розв'язувальних рівнянь ми використовуємо співвідношення теорії пружності в декартовій системі координат $Oxyz$ [6].

Рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+X=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+Y=0,\\
&\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+Z=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Співвідношення Коші:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\qquad \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\
&\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\qquad \varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right).
\end{aligned}\tag{2}$$

Фізичні рівняння, що виражають закон Гука:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\frac{1}{E}(\sigma_{xx}-\nu\sigma_{yy}-\nu\sigma_{zz}),\qquad \varepsilon_{yy}=\frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx}+\sigma_{yy}-\nu\sigma_{zz}),\\
&\varepsilon_{zz}=\frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx}-\nu\sigma_{yy}+\sigma_{zz}),\qquad \varepsilon_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{2G},\qquad \varepsilon_{yz}=\frac{\sigma_{yz}}{2G},\qquad \varepsilon_{zx}=\frac{\sigma_{zx}}{2G}
\end{aligned}\tag{3}$$

або

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}=2G\varepsilon_{xx}+\lambda\Theta,\qquad \sigma_{yy}=2G\varepsilon_{yy}+\lambda\Theta,\qquad \sigma_{zz}=2G\varepsilon_{zz}+\lambda\Theta,\\
&\sigma_{yz}=2G\varepsilon_{yz},\qquad \sigma_{xz}=2G\varepsilon_{xz},\qquad \sigma_{xy}=2G\varepsilon_{xy},\qquad \Theta=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz},\\
&\lambda=\frac{2\nu G}{1-2\nu}=\frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}.
\end{aligned}\tag{4}$$

Тут σ — напруження; ε — деформації; u, v та w — компоненти вектора переміщення; λ, G — коефіцієнти Ламе; E — модуль Юнга; ν — коефіцієнт Пуассона; X, Y, Z — компоненти вектора масових сил.

Тоді з (1)–(4) можемо отримати систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних (рівняння Ламе), що описує напружено-деформований стан прямокутної товстостінної ізотропної пластини:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c_1\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+d_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-\frac{X}{G},\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=a_2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+b_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+c_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+d_2\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}-\frac{Y}{G},\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=a_3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+b_3\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}+c_3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+d_3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{Z}{2G+\lambda}.
\end{aligned}\tag{5}$$

Коефіцієнти a_i, b_i, c_i, d_i визначаються механічними характеристиками матеріалу.

Крайові умови на гранях пластини часто задаються у змішаному вигляді або у напруженнях, проте не важко, використовуючи співвідношення пружності та Коші, перейти до їх запису в переміщеннях.

Метод розв'язання. Розв'язок системи (5) шукатимемо у вигляді:

$$u(x,y,z)=\sum_{j=0}^{M}\sum_{i=0}^{N}u_{ij}(z)\varphi_i^u(x)\psi_j^u(y),$$

$$v(x,y,z)=\sum_{j=0}^{M}\sum_{i=0}^{N}v_{ij}(z)\varphi_i^v(x)\psi_j^v(y), \tag{6}$$

$$w(x,y,z)=\sum_{j=0}^{M}\sum_{i=0}^{N}w_{ij}(z)\varphi_i^w(x)\psi_j^w(y),$$

де $u_{ij}(z)$, $v_{ij}(z)$, $w_{ij}(z)$ — шукані функції, а функції φ_i^a, ψ_j^a, $a=u,\,v,\,w$ визначаються через лінійні комбінації B_3 сплайнів на рівномірних сітках $0=x_0<x_1<\cdots<x_N=a$ та $0=y_0<y_1<\cdots<y_M=b$ відповідно з урахуванням граничних умов при $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$.

Це дозволяє застосувати метод сплайн-колокації за координатами x та y та звести початкову задачу до системи $6(N+1)(M+1)$ звичайних диференціальних рівнянь.

Для того щоб виписати цю систему в явному вигляді, позначимо через $A\left[\dfrac{\partial^n\varphi_a}{\partial x^n},\dfrac{\partial^m\psi_a}{\partial y^m}\right]$ матрицю розмірності $(N+1)(M+1)\times(N+1)(M+1)$ вигляду:

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial^n\varphi_0^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_0^{a0}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_0^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_M^{a0}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_M^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_0^{a0}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_M^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_M^{a0}}{\partial y^m}\\
\frac{\partial^n\varphi_0^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_0^{a1}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_0^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_M^{a1}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_M^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_0^{a1}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_M^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_M^{a1}}{\partial y^m}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial^n\varphi_0^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_0^{aM}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_0^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_M^{aM}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_M^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_0^{aM}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_M^{a0}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_M^{aM}}{\partial y^m}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial^n\varphi_0^{aN}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_0^{aM}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_0^{aN}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_M^{aM}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_0^{aN}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_M^{aM}}{\partial y^m} & \cdots & \frac{\partial^n\varphi_0^{aN}}{\partial x^n}\frac{\partial^m\psi_M^{aM}}{\partial y^m}
\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Через $A[\varphi_a,\psi_a]$ позначимо матрицю розмірності $(N+1)(M+1)\times(N+1)(M+1)$ вигляду

$$\begin{pmatrix}
\varphi_0^{a0}\psi_0^{a0} & \cdots & \varphi_0^{a0}\psi_M^{a0} & \cdots & \varphi_M^{a0}\psi_0^{a0} & \cdots & \varphi_M^{a0}\psi_M^{a0}\\
\varphi_0^{a0}\psi_0^{a1} & \cdots & \varphi_0^{a0}\psi_M^{a1} & \cdots & \varphi_M^{a0}\psi_0^{a1} & \cdots & \varphi_M^{a0}\psi_M^{a\,1}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\varphi_0^{a0}\psi_0^{aM} & \cdots & \varphi_0^{a0}\psi_M^{aM} & \cdots & \varphi_M^{a0}\psi_0^{aM} & \cdots & \varphi_M^{a0}\psi_M^{aM}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\varphi_0^{aN}\psi_0^{aM} & \cdots & \varphi_0^{aN}\psi_M^{aM} & \cdots & \varphi_0^{aN}\psi_M^{aM} & \cdots & \varphi_0^{aN}\psi_M^{aM}
\end{pmatrix}. \tag{8}$$

У позначеннях (7), (8): $\varphi_i^{aj}=\varphi_i^a(\xi_j)$, $\psi_k^{al}=\psi_k^a(\eta_l)$, $i,j=1,\ldots,N$, $k,l=1,\ldots,M$, $a=u,v,w$.

В рамках позначень (7), (8) визначимо матриці коефіцієнтів розмірності $(N+1)(M+1)\times(N+1)(M+1)$ кожна:

$$
\begin{aligned}
&A_1^u = A[\varphi_u, \psi_u], \quad A_2^u = A\left[\frac{\partial^2\varphi_u}{\partial x^2}, \psi_u\right], \quad A_3^u = A\left[\varphi_u, \frac{\partial^2\psi_u}{\partial y^2}\right], \quad A_4^u = A\left[\frac{\partial\varphi_v}{\partial x}, \frac{\partial\psi_v}{\partial y}\right],\\
&A_5^u = A\left[\frac{\partial\varphi_w}{\partial x}, \psi_w\right], \quad A_1^v = A[\varphi_v, \psi_v], \quad A_2^v = A\left[\frac{\partial^2\varphi_v}{\partial x^2}, \psi_v\right], \quad A_3^v = A\left[\varphi_v, \frac{\partial^2\psi_v}{\partial y^2}\right],\\
&A_4^v = A\left[\frac{\partial\varphi_u}{\partial x}, \frac{\partial\psi_u}{\partial y}\right], \quad A_5^v = A\left[\varphi_w, \frac{\partial\psi_w}{\partial y}\right], \quad A_1^w = A[\varphi_w, \psi_w], \quad A_2^w = A\left[\frac{\partial\varphi_u}{\partial x}, \psi_u\right],\\
&A_3^w = A\left[\varphi_v, \frac{\partial\psi_v}{\partial y}\right], \quad A_4^w = A\left[\frac{\partial^2\varphi_w}{\partial x^2}, \psi_w\right], \quad A_5^w = A\left[\varphi_w, \frac{\partial^2\psi_w}{\partial y}\right].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Функції $\varphi_i^a(x)$, $\psi_j^a(y)$ наводяться у вигляді лінійних комбінацій B-сплайнів третього степеня. При виборі точок колокації для забезпечення найкращої апроксимації доцільно розглядати сітку з парною кількістю вузлів за кожним з напрямків: $N = 2n+1$, $M = 2m+1$. На проміжках $[x_{2i}, x_{2i+1}]$, $[y_{2j}, y_{2j+1}]$ береться по два вузли колокації, а на проміжках $[x_{2i+1}, x_{2i+2}]$, $[y_{2j+1}, y_{2j+2}]$ не вибирається жодного: $\xi_{2i} \in [x_{2i}, x_{2i+1}]$, $\xi_{2i+1} \in [x_{2i}, x_{2i+1}]$, $\eta_{2j} \in [y_{2j}, y_{2j+1}]$, $\eta_{2j+1} \in [y_{2j}, y_{2j+1}]$. Всередині проміжків вузли задаються за правилом: $\xi_{2i} = x_{2i} + s_1 h_x$, $\xi_{2i+1} = x_{2i} + s_2 h_x$, $\eta_{2j} = y_{2j} + s_1 h_y$, $\eta_{2j+1} = y_{2j} + s_2 h_y$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$, де s_1, s_2 — корені полінома Лежандра другого порядку на відрізку $[0,1]$, що дорівнюють $s_1 = 1/2 - \sqrt{3}/6$, $s_2 = 1/2 + \sqrt{3}/6$. Такий вибір вузлів колокації є оптимальним і забезпечує точність апроксимації за кожним напрямком, що дорівнює $O(h_x^3)$, $O(h_y^3)$, відповідно.

З урахуванням позначень (9) систему (5) можна подати у вигляді

$$
\frac{d\overrightarrow{S}}{dz} = A\overrightarrow{S} + \overrightarrow{f}, \tag{10}
$$

де

$$
A = \begin{pmatrix}
\mathrm{O} & E & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O}\\
A_2^1 & \mathrm{O} & A_2^3 & \mathrm{O} & \mathrm{O} & A_2^6\\
\mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & E & \mathrm{O} & \mathrm{O}\\
A_4^1 & \mathrm{O} & A_4^3 & \mathrm{O} & \mathrm{O} & A_4^6\\
\mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & E\\
\mathrm{O} & A_6^2 & \mathrm{O} & A_6^4 & A_6^5 & \mathrm{O}
\end{pmatrix}; \qquad
\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix}
\mathrm{O}\\
-\dfrac{\overrightarrow{X}}{G}\\
\mathrm{O}\\
-\dfrac{\overrightarrow{Y}}{G}\\
\mathrm{O}\\
-\dfrac{\overrightarrow{Z}}{2G+\lambda}
\end{pmatrix};
$$

$\overrightarrow{S}$ — шуканий вектор, утворений з невідомих коефіцієнтів рядів (6); O — нуль-матриця; E — одинична матриця; $\dim A = 6(N+1)(M+1)\times 6(N+1)(M+1)$; $\dim\overrightarrow{S} = \dim\overrightarrow{f} = 6(N+1)(M+1)\times 1$; $\dim A_i^j = \dim\mathrm{O} = \dim E = (N+1)(M+1)\times(N+1)(M+1)$; $i = 2,4,6$, $j = \overline{1,6}$,

$$
\begin{aligned}
&A_2^1 = (A_1^u)^{-1}(a_1 A_2^u + b_1 A_3^u), \qquad A_2^3 = (A_1^u)^{-1}(c_1 A_4^u), \qquad A_2^6 = (A_1^u)^{-1}(d_1 A_5^u),\\
&A_4^1 = (A_1^v)^{-1}(c_2 A_4^v), \qquad A_4^3 = (A_1^v)^{-1}(a_2 A_2^v + b_2 A_3^v), \qquad A_4^6 = (A_1^v)^{-1}(d_2 A_5^v),\\
&A_6^2 = (A_1^w)^{-1}(a_3 A_2^w), \qquad A_6^4 = (A_1^w)^{-1}(b_3 A_3^w), \qquad A_6^5 = (A_1^w)^{-1}(c_3 A_4^w + d_3 A_5^w).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Крайові умови на сторонах $z = 0$, $z = c$ отримуються аналогічно і матимуть вигляд:

$$B_r\overrightarrow{S(r)} = \overrightarrow{f_r}, r = 0, c. \tag{12}$$

Тут B_r — матриці розмірності $3(N+1)(M+1) \times 6(N+1)(M+1)$, а $\overrightarrow{f_r}$ — відповідні вектори. Крайову задачу (10), (12) розв'язуємо стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Розв'язки задач. Аналіз результатів. Порівняємо розв'язки, одержані вказаним вище способом, із результатами розв'язання задачі методом відокремлення змінних за допомогою рядів Фур'є.

Розглянемо пластину з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0{,}3$.

Нехай сторони пластини $a = b = 1$, товщина — $h = 0{,}1$, $\nu = 0{,}3$, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. На гранях $z = 0$, $z = h$ крайові умови мають вигляд:

$$\sigma_{zz_0} = q, \qquad \sigma_{zx_0} = \sigma_{zy_0} = \sigma_{zz_h} = \sigma_{zx_h} = \sigma_{zy_h} = 0. \tag{13}$$

На краях $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ задамо умови шарнірного опирання. Для $x = \text{const}$: $\sigma_{xy} = 0$, $v = 0$, $w = 0$; для $y = \text{const}$: $\sigma_{xy} = 0$, $u = 0$, $w = 0$. Тоді шукані функції переміщень слід шукати у вигляді:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(z)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\\
v(x,y,z) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}(z)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},\\
w(x,y,z) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(z)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Після підстановки (14) в (5) для кожної з гармонік ряду отримуємо рівняння вигляду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_{mn}(z)}{\partial z^2} &= a_1\frac{m^2\pi^2}{a^2}u_{mn}(z) + b_1\frac{n^2\pi^2}{b^2}u_{mn}(z) + c_1\frac{mn\pi^2}{ab}v_{mn}(z) + d_1\frac{m\pi}{a}w_{mn}(z),\\
\frac{\partial^2 v_{mn}(z)}{\partial z^2} &= a_2\frac{n^2\pi^2}{b^2}v_{mn}(z) + b_2\frac{m^2\pi^2}{a^2}v_{mn}(z) + c_2\frac{mn\pi^2}{ab}u_{mn}(z) + d_2\frac{n\pi}{b}w_{mn}(z),\\
\frac{\partial^2 w_{mn}(z)}{\partial z^2} &= a_3\frac{m\pi}{a}u_{mn}(z) + b_3\frac{n\pi}{b}v_{mn}(z) + c_3\frac{m^2\pi^2}{a^2}w_{mn}(z) + d_3\frac{n^2\pi^2}{b^2}w_{mn}(z).
\end{aligned} \tag{15}$$

З крайовими умовами на сторонах $z = 0$

$$\begin{aligned}
&\beta_1\frac{m\pi}{a}u_{mn}(z) + \beta_2\frac{n\pi}{b}v_{mn}(z) + \beta_3\frac{\partial w_{mn}(z)}{\partial z} = \frac{16q}{\pi^2 mn},\\
&\frac{m\pi}{a}w_{mn}(z) + \frac{\partial u_{mn}(z)}{\partial z} = 0,\\
&\frac{n\pi}{b}w_{mn}(z) + \frac{\partial v_{mn}(z)}{\partial z} = 0;
\end{aligned} \tag{16}$$

на сторонах $z = h$:

$$\beta_1 \frac{m\pi}{a} u_{mn}(z) + \beta_2 \frac{n\pi}{b} v_{mn}(z) + \beta_3 \frac{\partial w_{mn}(z)}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{m\pi}{a} w_{mn}(z) + \frac{\partial u_{mn}(z)}{\partial z} = 0, \qquad (17)$$
$$\frac{n\pi}{b} w_{mn}(z) + \frac{\partial v_{mn}(z)}{\partial z} = 0.$$

Коефіцієнти β_i в (16) та (17) визначаються зі співвідношень Коші та закону Гука. Знайшовши розв'язки даних задач методом дискретної ортогоналізації і підставивши їх у формули (14), отримаємо значення шуканих функцій переміщень.

Оскільки область, що розглядається, при вказаних граничних умовах має осі симетрії $x = a/2$ та $y = b/2$, за допомогою сплайн-колокації задача була розв'язана на прямокутнику $[0, a/2] \times [0, b/2]$. При цьому використано умови симетрії при $x = a/2$: $u = 0$, $\partial v/\partial x = 0$, $\partial w/\partial x = 0$; при $y = b/2$: $v = 0$, $\partial u/\partial y = 0$, $\partial w/\partial y = 0$.

З застосуванням методу сплайн-колокації були отримані результати при різній кількості точок колокації, а саме, для $M = N = 8$, $M = N = 10$, $M = N = 12$, та при різній кількості точок інтегрування ($N_1 = 50$, $N_2 = 100$, $N_3 = 200$). Отримані результати майже однакові при різній кількості точок інтегрування, що підтверджує збіжність методу. Дані розрахунків надалі будемо наводити для $N_2 = 100$.

В табл. 1 наведено значення функції переміщення wE/q, знайдені за допомогою методів відокремлення змінних при кількості гармонік ряду $N = M = 10$, $N = M = 12$ та сплайн-колокації при кількості точок колокації $N = M = 8$, $N = M = 10$, $N = M = 12$. Розрахунки проводилися для точок: $x_1 = (0{,}5; 0{,}5; 0{,}001)$, $x_2 = (0{,}5; 0{,}5; 0{,}05)$, $x_3 = (0{,}5; 0{,}5; 0{,}099)$. На рис. 1, *а* показано розподіл переміщень wE/q в площині $z = h/2$ на прямокутнику $[0, a/2] \times [0, b/2]$. Симетричність результатів також підтверджує достовірність отриманого розв'язку.

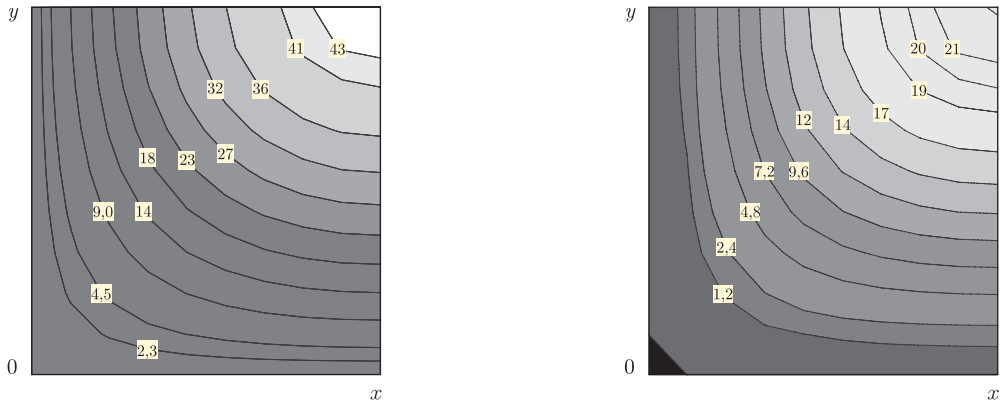
Також було розв'язано задачу про напружено-деформований стан тієї ж пластини при жорстко закріпленому контурі. Отримані для цього випадку результати показано в табл. 2. Розподіл переміщень wE/q в площині $z = h/2$ на прямокутнику $[0, a/2] \times [0, b/2]$ наведено на рис. 1, *б*.

Таблиця 1

Точки колокації	Метод Фур'є		Метод сплайн-колокації		
	$N, M = 10$	$N, M = 12$	$N, M = 8$	$N, M = 10$	$N, M = 12$
x_1	45,02033	45,49807	42,00064	44,41573	45,12831
x_2	45,14742	45,57635	42,14217	44,45266	45,17275
x_3	45,02972	45,50392	41,98917	44,40461	45,11987

Таблиця 2

Точки колокації	Метод сплайн-колокації		
	$N, M = 8$	$N, M = 10$	$N, M = 12$
x_1	21,33551	22,08311	22,36958
x_2	21,35532	22,11377	22,41866
x_3	21,33482	22,07566	22,35352



а *б*

Рис. 1. Розподіл переміщень при шарнірному опиранні країв (*а*) та при жорсткому закріпленні країв (*б*)

Проведено розрахунки при $N = M = 8$, $N = M = 10$, $N = M = 12$. для точок: $x_1 = (0{,}5; 0{,}5; 0{,}001)$, $x_2 = (0{,}5; 0{,}5; 0{,}05)$, $x_3 = (0{,}5; 0{,}5; 0{,}099)$.

Таким чином, з одержаних результатів видно, що чисельні значення шуканих функцій при різній кількості точок колокації майже збігаються. Це свідчить про стійкість методу. Збіг розв'язків, одержаних методами сплайн-колокації та відекремлення змінних, є критерієм достовірності одержаних результатів. Тому можна зробити висновок, що запропонований чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні методу сплайн-колокації за двома координатними напрямками та методу дискретної ортогоналізації для розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку дозволяє проводити дослідження напружено-деформованого стану прямокутних пластин у тривимірній постановці. Цей підхід можна також ефективно використовувати для випадку ортотропного матеріалу пластини.

1. *Победря Б. Е., Шешенин С. В.* Некоторые задачи о равновесии упругого параллелепипеда // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. – 1981. – № 1. – С. 133–138.
2. *Суслова Н. Н.* Методы решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда // Итоги науки и техники. Т. 13. Сер. механика твердого деформированного тела. – Москва: ВИНИТИ АН СССР, 1980. – С. 187–296.
3. *Budak V. D., Grigorenko A. Ya., Puzyrev S. V.* Solution describing the natural vibrations of rectangular shallow shells with varying thickness // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43 (4)**. – P. 432–441.
4. *Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N.* Influence of orthotropy on displacements and stresses in nonthin cylindrical shells with elliptic cross section // Ibid. – **43 (6)**. – P. 654–661.
5. *Grigorenko Ya. M., Vlaikov G. G., Grigorenko A. Ya.* Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. – Київ: ВД "Академперіодика", 2009. – 506 с.
6. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York: McGraw Hill, 1951. – 550 p.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 05.02.2010

A. Ya. Grigorenko, A. S. Bergulyov, S. N. Yaremchenko

Solving the 3D boundary-value problems on the bending of rectangular plates

A numerical-analytical approach to the research of a stress-strain state of rectangular plates is developed. The problem is solved on the basis of a three-dimensional model of the theory of elasticity. The system of differential equations in partial derivatives is reduced to a one-dimensional problem within the method of spline-collocation in two coordinate directions. The boundary-value problem for a system of ordinary differential equations of a higher order is solved by a steady numerical method of discrete ortogonalization. Examples of calculations for various boundary conditions are presented.