ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9+531.19+530.145

В. І. Герасименко, Д. О. Поліщук

Група операторів ієрархії рівнянь Неймана

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Досліджено властивості групи нелінійних операторів ієрархії Неймана для кореляційних операторів квантових багаточастинкових систем, які описуються статистиками Фермі–Дірака або Бозе–Ейнштейна. Доведено теорему існування розв'язків задачі Коші для цієї ієрархії у відповідних просторах послідовностей ядерних операторів.

Добре відомо значення математичного опису кореляцій для багатьох проблем сучасної статистичної механіки. Як приклад відзначимо таку фундаментальну проблему, як строгий вивід квантових кінетичних рівнянь [1–4], зокрема кінетичних рівнянь, що описують Бозе гази в конденсованому стані [4, 5].

Мета даної роботи полягає в строгому обгрунтуванні ієрархії нелінійних рівнянь Неймана, якою описуються кореляції у Фермі та Бозе багаточастинкових системах, і дослідженні властивостей групи нелінійних операторів, що породжується цією ієрархією. Встановлено, що у відповідних просторах послідовностей ядерних операторів така група є групою класу C_0, і на основі цього в роботі побудовано розв'язок задачі Коші ієрархії рівнянь фон Неймана для початкових даних з цих просторів.

Нехай $\mathcal{H}$ — гільбертів простір, що асоціюється з однією частинкою, тоді $\mathcal{H}_n \equiv \mathcal{H}^{\otimes n}$ — n-частинковий гільбертів простір та $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$. Нехай $\mathfrak{S}_n$ — група перестановок множини індексів $(1, \ldots, n)$. Кожній перестановці $\pi \in \mathfrak{S}_n$ цієї множини відповідає ізоморфізм p_π простору $\mathcal{H}^{\otimes n}$ в себе. Оператор p_π відображає факторизовані елементи $\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \cdots \otimes \psi_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ в $\psi_{\pi(1)} \otimes \psi_{\pi(2)} \otimes \cdots \otimes \psi_{\pi(n)} \in \mathcal{H}^{\otimes n}$. Оператор симетризації $\mathcal{S}_n^+$ та оператор антисиметризації $\mathcal{S}_n^-$ визначені на просторі $\mathcal{H}^{\otimes n}$ такою формулою

$$\mathcal{S}_n^{\pm} \doteq \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\pm 1)^{|\pi|} p_\pi, \tag{1}$$

де $|\pi|$ — кількість попарних перестановок перестановки π. Оператори $\mathcal{S}_n^{\pm}$ є ортогональними проекторами, тобто $(\mathcal{S}_n^{\pm})^2 = \mathcal{S}_n^{\pm}$, області значень яких є відповідно симетричним тензорним добутком $\mathcal{H}_n^+$ та антисиметричним тензорним добутком $\mathcal{H}_n^-$ n гільбертових просторів $\mathcal{H}$.

Символами $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{\pm}$ позначимо простори Фока, які відповідають Фермі та Бозе системам частинок [6].

Розглянемо квантову систему не фіксованого, тобто довільного, але скінченного числа однакових (безспінових) частинок з одиничною масою $m = 1$ в просторі $\mathbb{R}^{\nu}$, $\nu \geqslant 1$, що задовольняють статистику Фермі–Дірака або Бозе–Ейнштейна. Гамільтоніан $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$ системи є самоспряженим оператором ($H_0 = 0$) з областю визначення $\mathcal{D}(H) = \Big\{\psi = \bigoplus \psi_n \in \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm} \mid \psi_n \in \mathcal{D}(H_n) \in \mathcal{H}_n^{\pm}, \sum_n \|H_n\psi_n\|^2 < \infty\Big\} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm}$. На функціях ψ_n, що належать підпросторам $\mathcal{S}_n^{\pm} L_0^2(\mathbb{R}^{\nu n}) \subset \mathcal{D}(H_n) \subset \mathcal{S}_n^{\pm} L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$ нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями, n-частинковий гамільтоніан діє згідно з формулою

$$H_n\psi_n = \sum_{i=1}^{n} K(i)\psi_n + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1<\dots<i_k=1}^{n} \Phi^{(k)}(i_1,\dots,i_k)\psi_n, \tag{2}$$

де $K(i)\psi_n = -(\hbar^2/2)\Delta_{q_i}\psi_n$ — оператор кінетичної енергії, $\Phi^{(k)}(i_1,\dots,i_k)\psi_n = = \Phi^{(k)}(q_{i_1},\dots,q_{i_k})\psi_n$ — k-частковий потенціал взаємодії, $2\pi\hbar$ — постійна Планка. Вважатимемо, що функції $\Phi^{(k)}$, $k \geqslant 1$, є трансляційно-інваріантними, симетричними відносно перестановок аргументів та задовольняють умови Като [7], які гарантують самоспряженість оператора Гамільтона (2).

Стани систем Бозе та Фермі частинок належать відповідно простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm}) = = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})$ послідовностей $f = (f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ ядерних операторів $f_n \equiv f_n(1,\dots,n) \in \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})$ і $f_0 \in \mathbb{C}$, що задовольняють умову симетрії $f_n(1,\dots,n) = f_n(i_1,\dots,i_n)$ для довільних $(i_1,\dots,i_n) \in (1,\dots,n)$, з нормою

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm})} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Tr}_{1,\dots,n}|f_n(1,\dots,n)|,$$

де символ $\mathrm{Tr}_{1,\dots,n}$ — частинні сліди. Позначимо $\mathfrak{L}_0^1$ всюди щільну в просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm})$ множину фінітних послідовностей вироджених операторів [7] з нескінченно диференційовними ядрами з компактними носіями. Зазначимо, що простір $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm})$ містить більш загальні послідовності операторів, ніж ті, якими описуються стани квантових систем.

У просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm})$ введемо однопараметричну сім'ю відображень $\mathcal{G}(-t) = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{G}_n(-t)$ згідно з формулою

$$\mathcal{G}_n(-t)f_n \doteq e^{-\frac{i}{\hbar}tH_n} f_n e^{\frac{i}{\hbar}tH_n}. \tag{3}$$

У просторах $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm})$ відображення $t \to \mathcal{G}(-t)f$ визначено і є ізометричною сильно неперервною групою операторів, яка зберігає позитивність та самоспряженість операторів. Цією групою операторів визначається розв'язок задачі Коші рівняння Неймана (квантового рівняння Ліувілля) [8].

Для $f \in \mathfrak{L}_0^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm}) \subset \mathcal{D}(-\mathcal{N})$ у сенсі збіжності за нормою в просторах $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm})$ існує границя, якою визначається інфінітезимальний генератор $\mathcal{N} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{N}_n$ групи операторів (3)

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\mathcal{G}(-t)f - f) = -\frac{i}{\hbar}(Hf - fH) \doteq -\mathcal{N}f,$$

де $H = \oplus_{n=0}^{\infty} H_n$ — гамільтоніан (2), оператор $(-\frac{i}{\hbar}(Hf - fH))$ визначено на $\mathcal{D}(H) \subset \subset \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm}$.

Кумулянти s-го порядку $\mathfrak{A}_s(t, Y)$ груп операторів (3) визначено такою формулою [9]:

$$\mathfrak{A}_s(t, 1, \ldots, s) \doteq \sum_{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,s)=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} \mathcal{G}_{|X_i|}(-t, X_i),$$

де $\sum\limits_{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,s)=\bigcup_i X_i, |\mathrm{P}|>1}$ — сума за всіма можливими розбиттями P множини $(1, \ldots, s)$ на $|\mathrm{P}| > 1$ непорожніх підмножин $X_i \subset (1, \ldots, s)$, що взаємно не перетинаються.

Надалі вживаються такі позначення: $(\{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\})$ — множина, елементами якої є $|\mathrm{P}|$ підмножин $X_i \subset Y \equiv (1, \ldots, s)$, що попарно не перетинаються, розбиття $\mathrm{P}\colon Y = \bigcup\limits_{i=1}^{|\mathrm{P}|} X_i$, тобто число елементів цієї множини дорівнює $|(\{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\})| = |\mathrm{P}|$. Згідно з введеним позначенням множина $\{Y\}$ складається з одного елемента — множини $Y = (1, \ldots, s)$ розбиття P $(|\mathrm{P}| = 1)$, тобто $|\{Y\}| = 1$.

На множині індексів визначимо відображення декластеризації $\theta\colon (\{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\}) \to Y$ такою формулою:

$$\theta(\{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\}) = Y.$$

Наприклад, нехай $X \equiv (1, \ldots, s+n)$, тоді для множини $(\{Y\}, X \backslash Y)$ маємо $\theta(\{Y\}, X \backslash Y) = X$.

За допомогою відображення декластеризації визначимо узагальнення поняття кумулянта груп операторів у випадку кластерів частинок, а саме $\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t)$ — кумулянт $|\mathrm{P}|$-го порядку груп операторів (3) визначимо формулою

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t, \{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\}) \doteq \\ &\quad \doteq \sum_{\mathrm{P}'\colon (\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})=\bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)! \prod_{Z_k \subset \mathrm{P}'} \mathcal{G}_{|\theta(Z_k)|}(-t, \theta(Z_k)), \end{aligned} \tag{4}$$

де $\sum\limits_{\mathrm{P}'\colon (\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})=\bigcup_k Z_k}$ — сума за всіма можливими розбиттями P' множини $(\{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\})$ на $|\mathrm{P}'|$ непорожніх підмножин $Z_k \subset (\{X_1\}, \ldots, \{X_{|\mathrm{P}|}\})$, що попарно не перетинаються.

У термінах кореляційних операторів $g(t) = (0, g_1(t, 1), \ldots, g_s(t, 1, \ldots, s), \ldots) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm})$ еволюція всіх можливих станів систем Бозе та Фермі частинок описується задачею Коші ієрархії рівнянь Неймана

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} g_s(t, Y) = -\mathcal{N}_s(Y) g_s(t, Y) + \\ &\quad + \sum_{\substack{\mathrm{P}\colon Y=\bigcup_i X_i,\\ |\mathrm{P}|>1}} \sum_{\substack{Z_1 \subset X_1,\\ Z_1 \neq \varnothing}} \cdots \sum_{\substack{Z_{|\mathrm{P}|} \subset X_{|\mathrm{P}|},\\ Z_{|\mathrm{P}|} \neq \varnothing}} \Big(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{\left(\sum_{r=1}^{|\mathrm{P}|} |Z_r|\right)}(Z_1, \ldots, Z_{|\mathrm{P}|})\Big) \mathcal{S}_s^{\pm} \prod_{X_i \subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(t, X_i), \end{aligned} \tag{5}$$

$$g_s(t,Y)\big|_{t=0} = g_s(0,Y), \qquad s \geqslant 1, \tag{6}$$

де

$$\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{(n)}(1,\ldots,n) \doteq -\frac{i}{\hbar}[\cdot,\Phi^{(n)}(1,\ldots,n)],$$

$\Phi^{(n)}$ — n-частинковий потенціал взаємодії, визначений формулою (2), $\sum\limits_{\mathrm{P}\colon Y=\bigcup_i X_i, |\mathrm{P}|>1}$ — сума за всіма можливими розбиттями P множини $Y \equiv (1,\ldots,s)$ на $|\mathrm{P}|>1$ підмножин $X_i \subset Y$, що попарно не перетинаються, $\sum\limits_{Z_j\subset X_j, Z_j\neq\varnothing}$ — сума за всіма непорожніми підмножинами $Z_j \subset X_j$.

Зауважимо, що у випадку класичних багаточастинкових систем ієрархія (5) була введена в роботі [10] як наближення нульового порядку за густиною нелінійної ієрархії ББГКІ для маргінальних кореляційних функцій у випадку парного потенціалу взаємодії. Для квантових багаточастинкових систем, що описуються статистикою Максвелла–Больцмана, така ієрархія була введена в [11].

Розв'язок задачі Коші (5), (6) зображується таким розкладом:

$$g_s(t,Y) = \sum_{\mathrm{P}\colon Y=\bigcup_i X_i} \mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\mathcal{S}_s^{\pm}\prod_{X_i\subset\mathrm{P}} g_{|X_i|}(0,X_i), \qquad s\geqslant 1, \tag{7}$$

де $\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t)$ — кумулянт $|\mathrm{P}|$-го порядку (4) груп операторів (3), оператор симетризації $\mathcal{S}_s^{+}$ та оператор антисиметризації $\mathcal{S}_s^{-}$ визначені формулою (1).

У просторах $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm})$ розв'язок (7) породжує групу нелінійних операторів. Властивості цієї групи описує така теорема.

Теорема 1. *Для $f \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm})$ однопараметрична сім'я відображень*

$$t \to (\mathfrak{A}_t(f))_n \doteq \sum_{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,n)=\bigcup_i X_i} \mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\mathcal{S}_n^{\pm}\prod_{X_i\subset\mathrm{P}} f_{|X_i|}(X_i) \tag{8}$$

є групою нелінійних операторів класу C_0. У підпросторах $\mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_n^{\pm}) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})$ інфінітезимальний генератор $\mathfrak{N}(\cdot)$ групи (8) визначається таким оператором:

$$(\mathfrak{N}(f))_n(1,\ldots,n) \doteq -\mathcal{N}_n f_n +$$

$$+\sum_{\substack{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,n)=\bigcup_i X_i,\\ |\mathrm{P}|\neq 1}}\ \sum_{\substack{Z_1\subset X_1,\\ Z_1\neq\varnothing}}\cdots\sum_{\substack{Z_{|\mathrm{P}|}\subset X_{|\mathrm{P}|},\\ Z_{|\mathrm{P}|}\neq\varnothing}}\left(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{\left(\sum\limits_{r=1}^{|\mathrm{P}|}|Z_r|\right)}(Z_1,\ldots,Z_{|\mathrm{P}|})\right)\mathcal{S}_n^{\pm}\prod_{X_i\subset\mathrm{P}} f_{|X_i|}(X_i), \tag{9}$$

Доведення. Відображення (8) визначено на операторах $f_n \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})$, $n \geqslant 1$, і справедлива така оцінка:

$$\|(\mathfrak{A}_t(f))_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})} \leqslant n! e^{3n} c^n, \tag{10}$$

де $c \equiv \max(\widetilde{c},1)$ та $\widetilde{c} \equiv \max\limits_{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,n)=\bigcup_i X_i} \|f_{|X_i|}\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_{|X_i|}^{\pm})}$.

Групова властивість однопараметричної сім'ї нелінійних операторів $\mathfrak{A}_t(\cdot)$, визначених формулою (8), доводиться аналогічно випадку статистики Максвела–Больцмана [11].

Властивість сильної неперервності групи $\mathfrak{A}_t(\cdot)$ за параметром $t \in \mathbb{R}^1$ є наслідком сильної неперервності груп (3) рівнянь Неймана [6, 8]. Дійсно, згідно з рівністю

$$\sum_{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,n)=\bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathrm{P}|-1}(|\mathrm{P}|-1)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\mathrm{s}(n,k)(k-1)! = \delta_{n,1},$$

де $\mathrm{s}(n,k)$ — числа Стірлінга другого роду та $\delta_{n,1}$ — символ Кронекера, справедлива така рівність:

$$\sum_{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,n)=\bigcup_i X_i}\ \sum_{\mathrm{P}'\colon (\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})=\bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)!\mathcal{S}_n^{\pm}\prod_{X_i\subset \mathrm{P}} f_{|X_i|}(X_i) = f_n(1,\ldots,n).$$

Таким чином, для $f_n \in \mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_n^{\pm}) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})$, $n \geqslant 1$, справедливо

$$\lim_{t\to 0}\Bigg\|\sum_{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,n)=\bigcup_i X_i}\ \sum_{\mathrm{P}'\colon (\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})=\bigcup_k Z_k} (-1)^{|\mathrm{P}'|-1}(|\mathrm{P}'|-1)!\ \times$$

$$\times \prod_{Z_k\subset \mathrm{P}'}\mathcal{G}_{|\theta(Z_k)|}(-t,\theta(Z_k))\mathcal{S}_n^{\pm}\prod_{X_i\subset \mathrm{P}} f_{|X_i|}(X_i) - f_n\Bigg\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,n)=\bigcup_i X_i}\ \sum_{\mathrm{P}'\colon (\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})=\bigcup_k Z_k} (|\mathrm{P}'|-1)!\lim_{t\to 0}\Bigg\|\prod_{Z_k\subset \mathrm{P}'}\mathcal{G}_{|\theta(Z_k)|}(-t,\theta(Z_k))\mathcal{S}_n^{\pm}\ \times$$

$$\times \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} f_{|X_i|}(X_i) - \mathcal{S}_n^{\pm}\prod_{X_i\subset \mathrm{P}} f_{|X_i|}(X_i)\Bigg\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})}.$$

Оскільки відображення $\mathcal{G}_n(-t)$ є сильно неперервною групою (3), тобто в сенсі збіжності за нормою простору $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})$ існує границя

$$\lim_{t\to 0}(\mathcal{G}_n(-t)f_n - f_n) = 0,$$

для підмножин $X_i \subset Y$, що попарно не перетинаються, справедлива також така рівність:

$$\lim_{t\to 0}\left(\prod_{Z_k\subset \mathrm{P}'}\mathcal{G}_{|\theta(Z_k)|}(-t,\theta(Z_k))f_n - f_n\right) = 0.$$

Для $f_n \in \mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_n^{\pm}) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})$ ми виводимо

$$\lim_{t\to 0}\|(\mathfrak{A}_t(f))_n - f_n\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})} = 0.$$

Для побудови генератора $\mathfrak{N}(\cdot)$ сильно неперервної групи (8) спочатку продиференціюємо її в сенсі поточкової збіжності в просторах $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})$, тобто для довільних $\psi_n \in \mathcal{D}(H_n) \subset \mathcal{H}_n^{\pm}$.

Беручи до уваги, що для $f_n \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}^{\pm}_n) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{N}(\cdot)_n)$ справедлива рівність (4), для групи (8) ми виводимо

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((\mathfrak{A}_t(f))_n - f_n) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\sum_{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,n)=\bigcup\limits_i X_i} \mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\mathcal{S}^{\pm}_n \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} f_{|X_i|}(X_i) - f_n\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mathfrak{A}_1(t,\{1,\ldots,n\})f_n - f_n) +$$

$$+ \sum_{\substack{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,n)=\bigcup\limits_i X_i,\\ |\mathrm{P}|>1}} \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\mathfrak{A}_{|\mathrm{P}|}(t,\{X_1\},\ldots,\{X_{|\mathrm{P}|}\})\mathcal{S}^{\pm}_n \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} f_{|X_i|}(X_i) =$$

$$= -\mathcal{N}_n f_n + \sum_{\substack{\mathrm{P}\colon (1,\ldots,n)=\bigcup\limits_i X_i,\\ |\mathrm{P}|>1}} \sum_{\substack{Z_1\subset X_1,\\ Z_1\neq\varnothing}}\cdots\sum_{\substack{Z_{|\mathrm{P}|}\subset X_{|\mathrm{P}|},\\ Z_{|\mathrm{P}|}\neq\varnothing}} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{\left(\sum\limits_{r=1}^{|\mathrm{P}|}|Z_r|\right)}(Z_1,\ldots,Z_{|\mathrm{P}|})\mathcal{S}^{\pm}_n \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} f_{|X_i|}(X_i). \quad (11)$$

Отже, для $f_n \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}^{\pm}_n) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{N}(\cdot)_n) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}^{\pm}_n)$, $n \geqslant 1$, у сенсі збіжності за нормою в просторах $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}^{\pm}_n)$, ми остаточно маємо

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{1}{t}((\mathfrak{A}_t(f))_n - f_n) - (\mathfrak{N}(f))_n\right\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}^{\pm}_n)} = 0,$$

де $\mathfrak{N}(\cdot)$ визначено формулою (9).

Для абстрактної початкової задачі (5), (6) у просторах $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}^{\pm}_{\mathcal{H}})$ послідовностей ядерних операторів справедлива така теорема.

Теорема 2. *Розв'язок початкової задачі* (5), (6) *ієрархії рівнянь Неймана визначається розкладом* (7). *Для початкових даних* $g_n(0) \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}^{\pm}_n) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}^{\pm}_n)$ *формулою* (7) *визначається сильний (класичний) розв'язок, а для довільних початкових даних* $g_n(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}^{\pm}_n)$ — *слабкий (узагальнений) розв'язок.*

Твердження, що для початкових даних $g_n(0) \in \mathfrak{L}^1_0(\mathcal{H}^{\pm}_n) \subset \mathfrak{L}^1(\mathcal{H}^{\pm}_n)$, $n \geqslant 1$, послідовність (7) є сильним розв'язком початкової задачі (5), (6), є наслідком теореми 1.

Твердження, що у випадку довільних початкових даних $g(0) \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{F}^{\pm}_{\mathcal{H}})$ розкладом (7) визначається слабкий розв'язок початкової задачі ієрархії рівнянь Неймана (5), випливає зі справедливості рівняння

$$\frac{d}{dt}(f_s, g_s(t)) = (\mathcal{N}_s f_s, g_s(t)) +$$

$$+ \mathrm{Tr}_{1,\ldots,s} \sum_{\substack{\mathrm{P}\colon Y=\bigcup\limits_i X_i,\\ |\mathrm{P}|>1}} \sum_{\substack{Z_1\subset X_1,\\ Z_1\neq\varnothing}}\cdots\sum_{\substack{Z_{|\mathrm{P}|}\subset X_{|\mathrm{P}|},\\ Z_{|\mathrm{P}|}\neq\varnothing}} \mathcal{N}_{\mathrm{int}}^{\left(\sum\limits_{r=1}^{|\mathrm{P}|}|Z_r|\right)}(Z_1,\ldots,Z_{|\mathrm{P}|}) f_s \mathcal{S}^{\pm}_s \prod_{X_i\subset \mathrm{P}} g_{|X_i|}(t,X_i),$$

де для вироджених обмежених операторів з нескінченно диференційовними ядрами, зосередженими на компактах $f_s \in \mathfrak{L}_0(\mathcal{H}^{\pm}_s)$, та для операторів $g_s(t)$, визначених формулою (7), згідно з оцінкою (10) функціонал $(f_s, g_s(t)) \equiv \mathrm{Tr}_{1,\ldots,s} f_s g_s(t)$ існує.

Таким чином, кореляційні оператори, які є розв'язками (7) ієрархії нелінійних рівнянь Неймана (5), описують еволюцію квантових станів Бозе та Фермі багаточастинкових систем в альтернативний спосіб. У відповідних просторах послідовностей ядерних операторів $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm}) = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n^{\pm})$ цей розв'язок визначається групою нелінійних операторів класу C_0.

Відзначимо, що для початкових даних з просторів $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm})$ середнє число частинок є скінченним. Для опису еволюції нескінченночастинкових систем [12], зокрема, для виводу квантових кінетичних рівнянь з динаміки частинок необхідно побудувати розв'язки для початкових кореляційних операторів, що належать більш загальним банаховим просторам, ніж $\mathfrak{L}^1(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{\pm})$.

1. *Боголюбов М. М.* Лекції з квантової статистики. Питання статистичної механіки квантових систем. – Київ: Рад. школа, 1949. – 207 с.
2. *Gerasimenko V. I.* Approaches to derivation of quantum kinetic equations // Ukr. J. Phys. – 2009. – **54**, No 8–9. – P. 834–846.
3. *Arnold A.* Mathematical properties of quantum evolution equations // Lect. Notes Math. – 2008. – **1946**. – P. 45–109.
4. *Erdös L., Schlein B., Yau H.-T.* Derivation of the cubic non-linear Schrödinger equation from quantum dynamics of many-body systems // Invent. Math. – 2007. – **167**, No 3. – P. 515–614.
5. *Fröhlich J., Graffi S., Schwarz S.* Mean-field and classical limit of many-body Schrödinger dynamics for bosons // Commun. Math. Phys. – 2007. – **271**, No 3. – P. 681–697.
6. *Bratelli O., Robinson D. W.* Operator algebras and quantum statistical mechanics. – Berlin: Springer, 1997. – Vol. 2. – 505 p.
7. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – Berlin: Springer, 1995. – 740 p.
8. *Petrina D. Ya.* Mathematical foundations of quantum statistical mechanics. – Dordrecht: Kluwer, 1995. – 444 p.
9. *Gerasimenko V. I., Shtyk V. O.* Initial-value problem for the Bogolyubov hierarchy for quantum systems of particles // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, No 9. – P. 1175–1191.
10. *Green M. S.* Boltzmann equation from the statistical mechanical point of view // J. Chem. Phys. – 1956. – **25**, No 5. – P. 836–855.
11. *Gerasimenko V. I.* Groups of operators for evolution equations of quantum many-particle systems // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **191**. – P. 341–355.
12. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p.

Інститут математики НАН України, Київ
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 17.02.2010

V. I. Gerasimenko, D. O. Polishchuk

The group of operators of the von Neumann hierarchy of equations

We study properties of the group of nonlinear operators of the von Neumann hierarchy for correlation operators of quantum many-particle systems obeying the Fermi–Dirac or Bose–Einstein statistics. In the suitable spaces of sequences of trace class operators, the existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem of this hierarchy are proved.