УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен, Г. П. Івасюк

Про коректну розв'язність параболічних початкових задач Солонникова–Ейдельмана в узагальнених просторах Соболєва

(Представлено членом-кореспондентом НАН України України М. Л. Горбачуком)

Розглядаються означені авторами початкові задачі, які є узагальненнями початкових задач для параболічних за Солонниковим систем і задачі Коші для систем, параболічних у сенсі Ейдельмана. За певних припущень щодо параметрів, які визначають порядки диференціальних виразів з рівнянь системи та початкових умов, установлена теорема про коректну розв'язність таких початкових задач в узагальнених просторах Соболева.

У працях авторів [1–3] означено клас систем диференціальних рівнянь із частинними похідними, які природно узагальнюють параболічні за Солонниковим системи [4] і системи, параболічні в сенсі Ейдельмана [5], сформульовано початкові задачі для таких систем (їх названо параболічними початковими задачами Солонникова–Ейдельмана) та доведено теореми про коректну розв'язність цих задач у просторах Гельдера швидкозростаючих функцій і точні оцінки їх розв'язків.

У даному повідомленні для одного вужчого класу параболічних початкових задач Солонникова–Ейдельмана наводиться теорема про їх коректну розв'язність у відповідних узагальнених просторах Соболєва.

1. Нехай, як і в [1–3], n, N, $b_1, \ldots, b_n$ — задані натуральні числа, b — найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m := (m_1, \ldots, m_n)$, $m_0 := 2b$, $m_j := 2b/(2b_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $\|\overline{\alpha}\| := \sum_{j=0}^{n} m_j \alpha_j$, якщо $\overline{\alpha} := (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$; $\|\alpha\| := \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j$, якщо $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; i — уявна одиниця; $A(t, x, \partial_t, \partial_x) := (A_{kj}(t, x, \partial_t, \partial_x))_{k,j=1}^N$; $u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_N)$, $f := \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_N)$ — невідома та задана вектор-функції; $\Pi_T := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in [0; T], x \in \mathbb{R}^n\}$, T — задане додатне число.

Припустимо, що існують такі цілі числа s_k і t_j, що $\max\limits_{k \in \{1, \ldots, N\}} s_k = 0$, степінь відносно λ многочлена $A_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$, $\sigma\lambda^m := (\sigma_1\lambda^{m_1}, \ldots, \sigma_n\lambda^{m_n})$, не перевищує $s_k + t_j$ (якщо $s_k + t_j < 0$, то $A_{kj} := 0$) і $\sum_{k=1}^{N} (s_k + t_k) = 2br$, де r — степінь $\det A(t, x, p, i\sigma)$ як многочлена від p. Нехай $A^0 := (A^0_{kj})_{k,j=1}^N$ — головна частина A, тобто $A^0_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{s_k+t_j} A^0_{kj}(t, x, p, i\sigma)$.

Будемо розглядати систему рівнянь

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x)u(t, x) = f(t, x), \qquad (t, x) \in \Pi_T, \tag{1}$$

для якої виконується умова

A) $s_k = 2bs'_k$, $t_j = 2bt'_j$, $\{k,j\} \subset \{1,\ldots,N\}$, де s'_k і t'_j — цілі числа; існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $(t,x) \in \Pi_T$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$ p-корені рівняння $\det A^0(t,x,p,i\sigma) = 0$ задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} p(t,x,\sigma) \leqslant -\delta \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j}.$$

Нехай $B(x,\partial_t,\partial_x) := (B_{kj}(x,\partial_t,\partial_x))_{k=1,j=1}^{r,N}$ — матричний диференціальний вираз, $\varphi = \operatorname{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$ — задана вектор-функція. Припустимо, що існують такі цілі числа p_k, що степінь відносно λ многочлена $B_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m)$ не перевищує $p_k + t_j$, а якщо $p_k + t_j < 0$, то $B_{kj} := 0$.

Початкові умови для системи (1) задаються у вигляді

$$B(x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де матричний диференціальний вираз B задовольняє умову

B) $p_k = 2bp'_k$, $k \in \{1,\ldots,r\}$, де p'_k — цілі числа; існує така стала $\delta_1 > 0$, що для всіх матриць $H^{(p')}$ (їх означення див. у [1, 6]) і точок $x \in \mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$|\det H^{(p')}(x)| \geqslant \delta_1.$$

Задача (1), (2), для якої виконуються умови $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, називається параболічною початковою задачею Солонникова–Ейдельмана для випадку, коли s_k, t_j і p_k діляться на $2b$.

2. Наведемо означення потрібних функціональних просторів. Нехай l — невід'ємне ціле число, кратне $2b$, s — додатне число і число $p > 1$.

Через $W_p^l(\Pi_T)$ позначимо замикання множини гладких і фінітних за x функцій $u\colon \Pi_T \to \mathbb{C}$ за нормою

$$\|u\|_{p,l}^{\Pi_T} := \sum_{\|\overline{\alpha}\| \leqslant l} \langle \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u \rangle_{p,0}^{\Pi_T},$$

де

$$\langle u \rangle_{p,0}^{\Pi_T} := \left(\int_{\Pi_T} |u(t,x)|^p dt dx \right)^{1/p}.$$

Диференціальні властивості "слідів" при $t = \tau$ функцій із простору $W_p^l(\Pi_T)$ описуються в термінах простору $B_p^s(\mathbb{R}^n)$, який означується як замикання множини гладких і фінітних функцій $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ за нормою

$$\|v\|_{p,s}^{\mathbb{R}^n} := \sum_{\|\alpha\| < s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha v(x)|^p dt dx \right)^{1/p} + [v]_{p,s}^{\mathbb{R}^n},$$

де

$$[v]_{p,s}^{\mathbb{R}^n} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{0 \leqslant s - \|\alpha\| < m_j} \left(\int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}} \frac{|\Delta_{x_j}^{y_j} \partial_x^\alpha v(x)|^p}{|x_j - y_j|^{1+p(s-\|\alpha\|)/m_j}} dy_j \right)^{1/p},$$

якщо s — дробове число, і

$$[v]_{p,s}^{\mathbb{R}^n} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{\|\alpha\|=s-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|(\Delta^2)_{x_j}^{y_j} \partial_x^\alpha v(x)|^p}{|x_j - y_j|^{1+p}} dy_j \right)^{1/p},$$

якщо s є цілим числом. Тут

$$\Delta_{x_j}^{y_j} f(x) := f(x) - f(x(y_j)), \qquad (\Delta^2)_{x_j}^{y_j} f(x) := f(x) - 2f\left(x\left(\frac{x_j + y_j}{2}\right)\right) + f(x(y_j)),$$

де $x(y_j) := (x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Множину елементів $u \in W_p^l(\Pi_T)$, які задовольняють нульові початкові умови

$$\partial_t^j u\big|_{t=0} = 0, \qquad j \in \left\{0, 1, \ldots, \frac{l}{2b} - 1\right\},$$

назвемо простором $\overset{\circ}{W}{}_l^p(\Pi_T)$.

Через

$$\prod_{j=1}^{N} W_p^{l_j}(\Pi_T), \qquad \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}_p^{l_j}(\Pi_T), \qquad \prod_{j=1}^{r} B_p^{r_j}(\mathbb{R}^n)$$

позначатимемо декартові добутки відповідних просторів з цілими невід'ємними індексами l_j, кратними $2b$, і додатними індексами r_j.

Для дробового додатного числа s користуватимемось просторами Гельдера обмежених функцій $C_s(\mathbb{R}^n)$, означених у [3].

3. Сформулюємо основну теорему цієї роботи.

Теорема 1. *Нехай l — невід'ємне ціле число, кратне $2b$; виконуються умови $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$; коефіцієнти диференціальних виразів A_{kj}, $\{k, j\} \subset \{1, \ldots, N\}$, мають неперервні та обмежені похідні узагальненого порядку $l - s_k$, а коефіцієнти диференціальних виразів B_{kj}, $k \in \{1, \ldots, r\}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$, належать до просторів $C_{l-p_k-2b/p+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, де ε — досить мале додатне число. Тоді для будь-яких $f \in \prod_{j=1}^{N} W_p^{l-s_j}(\Pi_T)$ і $\varphi \in \prod_{j=1}^{r} B_p^{l-p_j-2b/p}(\mathbb{R}^n)$ існує єдиний розв'язок $u \in \prod_{j=1}^{N} W_p^{l+t_j}(\Pi_T)$ задачі (1), (2), для якого справджується оцінка*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|_{p,l+t_j}^{\Pi_T} \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{p,l-s_j}^{\Pi_T} + \sum_{j=1}^{r} \|\varphi_j\|_{p,l-p_j-2b/p}^{\mathbb{R}^n}\right),$$

в якій стала C залежить тільки від відповідних норм коефіцієнтів задачі, сталих δ і δ_1 з умов $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ та чисел n, N, b_j, t_j, s_k, p_k, l і T.

Доведення теореми 1 проводиться за схемою доведення в [6] відповідної теореми для крайових задач для параболічних за Солонниковим систем та доведення в [3] теореми 1 для параболічних початкових задач Солонникова–Ейдельмана в просторах Гельдера. Центральним моментом доведення є вивчення такої задачі з нульовими початковими даними в шарі Π_τ малої товщини $\tau > 0$:

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x) v(t, x) = g(t, x), \qquad (t, x) \in \Pi_\tau, \tag{3}$$

$$v \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}_p^{l+t_j}(\Pi_\tau),$$

де $g \in \prod\limits_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}_p^{l-s_j}(\Pi_\tau)$. Для цієї задачі доводиться така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді існує таке число $\tau_0 > 0$, що для будь-якого $\tau \in (0, \tau_0]$ задача* (3) *однозначно розв'язна і для її розв'язку справджується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{N} \|v_j\|_{p,l+t_j}^{\Pi_\tau} \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \|g_j\|_{p,l-s_j}^{\Pi_\tau},$$

в якій стала C залишається обмеженою при $\tau \to 0$.

Доведення теореми 2 грунтується на побудові та детальному дослідженні властивостей регуляризатора задачі (3). Регуляризатор будується за допомогою операторів, які розв'язують відповідні модельні задачі. Останні попередньо детально досліджуються.

1. *Івасишен С. Д., Івасюк Г. П.* Параболічні за Солонниковим системи квазіоднорідної структури // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1501–1510.
2. *Івасишен С. Д., Івасюк Г. П.* Початкові задачі для параболічних систем Солонникова–Ейдельмана // Доп. НАН України. – 2007. – № 9. – С. 7–11.
3. *Івасишен С. Д., Івасюк Г. П.* Коректна розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 650–671.
4. *Солонников В. А.* О краевых задачах для общих параболических систем // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 1. – С. 56–59.
5. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Там же. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40–43.
6. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3–163.

НТУ України "Київський політехнічний інститут"
Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 15.02.2010

S. D. Ivasyshen, G. P. Ivasyuk

On the correct solvability of parabolic initial problems of Solonnikov–Eidelman in generalized Sobolev spaces

The initial problems which are generalizations of those for Solonnikov-parabolic systems and of the Cauchy problem for the systems which are parabolic in the Eidelman sense are considered. Under special assumptions on parameters which define the orders of differential expressions from the equations of the system and initial values, the theorem on the correct solvability of such initial problems in generalized Sobolev spaces is established.