УДК 517.944

Академік НАН України **А. М. Самойленко, Н. Г. Хома,**
С. Г. Хома-Могильська

Властивості 2π-періодичного розв'язку крайової задачі

Вперше у спеціально виділеному класі функцій побудовано оператор, який переводить клас 2π-періодичних функцій самого в себе, і вивчено його властивості.

У попередній роботі [1] нами визначено оператор P, який переводить клас функцій $f(x,t) \in \in Q^{-}_{2\pi\times 2\pi} \bigcap C(\mathbb{R}^2)$, де $Q^{-}_{2\pi\times 2\pi} = \{f\colon f(x,t) = -f(-x,t) = f(x+2\pi,t) = f(x,t+2\pi)\}$, у цей же клас.

У даній роботі доведемо, якому диференціальному рівнянню задовольняє функція

$$v(x,t) = (PF[v,v_t,v_x])(x,t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left(\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F[v,v_t,v_x](\xi,\tau)\,d\xi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ds\int\limits_{x-t+s}^{x+t-s} F[v,v_t,v_x](\xi,s)\,d\xi\right)d\tau =$$
$$= z(x,t) + (P_0F[v,v_t,v_x])(x,t) \tag{1}$$

і деякі допоміжні оцінки, необхідні для доведення теореми існування розв'язку квазілінійної крайової 2π-періодичної задачі.

Теорема. *Нехай для кожної функції* $v(x,t)\in Q^{-}_{2\pi\times 2\pi}\bigcap C^2(\mathbb{R}^2)$ *функція* $F[v,v_t,v_x](x,t) = = f(x,t,v(x,t),v_t(x,t),v_x(x,t))\in Q^{-}_{2\pi\times 2\pi}\bigcap C^1(\mathbb{R}^2)$. *Тоді функція* $v(x,t) = (PF[v,v_t,v_x])(x,t)$, *визначена формулою* (1), *є* 2π*-періодичним розв'язком такої крайової періодичної задачі:*

$$v_{tt} - v_{xx} = F[v,v_t,v_x](x,t) -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(F[v,v_t,v_x](x+t-s,s) + F[v,v_t,v_x](x-t+s,s))\,ds, \tag{2}$$

$$v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \tag{3}$$

$$v(x,t+2\pi) = v(x,t), \qquad (x,t)\in\mathbb{R}^2. \tag{4}$$

Доведення. Те, що функція $v(x,t)$, визначена інтегральним рівнянням (1), задовольняє умови (3) і (4), доведено у роботі [1]. Тепер доведемо виконання рівності (2). На основі визначення функції $v(x,t)$ обчислимо похідні другого порядку v_{tt} і v_{xx}. Маємо

$$v_t(x,t) = \frac{1}{2}(\mu(t+x) - \mu(t-x)) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} ds\int\limits_{x-t+s}^{x+t-s} F[v,v_t,v_x](\xi,s)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\biggl(F[v,v_t,v_x](x+t-\tau,\tau)+F[v,v_t,v_x](x-t+\tau,\tau)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(F[v,v_t,v_x](x+t-s,s)+F[v,v_t,v_x](x-t+s,s))\,ds\biggr)d\tau;$$

$$v_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}\biggl(\frac{\partial\mu(t+x)}{\partial(t+x)}-\frac{\partial\mu(t-x)}{\partial(t-x)}\biggr)-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}(F[v,v_t,v_x](x+t-s,s)+F[v,v_t,v_x](x+t-s,s))\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\biggl(\frac{\partial F[v,v_t,v_x](x+t-\tau,\tau)}{\partial(x+t-\tau)}-\frac{\partial F[v,v_t,v_x](x-t+\tau,\tau)}{\partial(x-t+\tau)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\biggl(\frac{\partial F[v,v_t,v_x](x+t-s,s)}{\partial(x+t-s)}-\frac{\partial F[v,v_t,v_x](x-t+s,s)}{\partial(x-t+s)}\biggr)\,ds\biggr)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}(F[v,v_t,v_x](x,t)+F[v,v_t,v_x](x,t))-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}(F[v,v_t,v_x](x+t-s,s)+F[v,v_t,v_x](x-t+s,s))\,ds$$

або

$$v_{tt}(x,t)=\frac{1}{2}\biggl(\frac{\partial\mu(t+x)}{\partial(t+x)}-\frac{\partial\mu(t-x)}{\partial(t-x)}\biggr)+F[v,v_t,v_x](x,t)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(F[v,v_t,v_x](x+t-s,s)+F[v,v_t,v_x](x-t+s,s))\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\biggl(\frac{\partial F[v,v_t,v_x](x+t-\tau,\tau)}{\partial(x+t-\tau)}-\frac{\partial F[v,v_t,v_x](x-t+\tau,\tau)}{\partial(x-t+\tau)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\biggl(\frac{\partial F[v,v_t,v_x](x+t-s,s)}{\partial(x+t-s)}-\frac{\partial F[v,v_t,v_x](x-t+s,s)}{\partial(x-t+s)}\biggr)ds\biggr)d\tau; \tag{5}$$

$$v_x(x,t)=\frac{1}{2}(\mu(t+x)+\mu(t-x))+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\biggl(F[v,v_t,v_x](x+t-\tau,\tau)-F[v,v_t,v_x](x-t+\tau,\tau)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(F[v,v_t,v_x](x+t-s,s)-F[v,v_t,v_x](x-t+s,s))\,ds\biggr)d\tau;$$

$$v_{xx}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mu(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial\mu(t-x)}{\partial(t-x)}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial F[v,v_t,v_x](x+t-\tau,\tau)}{\partial(x+t-\tau)} - \frac{\partial F[v,v_t,v_x](x-t+\tau,\tau)}{\partial(x-t+\tau)} -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F[v,v_t,v_x](x+t-s,s)}{\partial(x+t-s)} - \frac{\partial F[v,v_t,v_x](x-t+s,s)}{\partial(x-t+s)}\right)ds\right)d\tau. \tag{6}$$

На основі рівностей (5) і (6) знаходимо

$$v_{tt} - v_{xx} = F[v,v_t,v_x](x,t) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(F[v,v_t,v_x](x+t-s,s) + F[v,v_t,v_x](x-t+s,s))\,ds,$$

що треба було довести.

Тепер доведемо ряд оцінок, потрібних при доведенні теореми існування розв'язку крайової періодичної задачі (2)–(4).

Лема 1. *Нехай* $f(x,t)$ *— неперервна на прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi} = \{0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$ *функція. Тоді для ядра*

$$K(x,t,\tau) = \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi \tag{7}$$

оператора Даламбера

$$(\widetilde{P}_0 f)(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\,d\xi \tag{8}$$

справедлива оцінка

$$|K(x,t,\tau)| \leqslant M_0|t-\tau|,$$

де $M_0 = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Pi}_{2\pi}} |f(x,t)|$.

Лема 2. *Нехай* $f(x,t)$ *— неперервна на прямокутнику* $\overline{\Pi}_{2\pi}$ *функція. Тоді*

$$\left|\int\limits_0^t \left(K(x,t,\tau) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(x,t,s)\,ds\right)d\tau\right| \leqslant \frac{1}{2}(2\pi t - t^2)M_0 \equiv \frac{M_0}{2}\beta_1(t),$$

де $\beta_1(t) = 2\pi t - t^2$, *причому* $\beta_1(t) \leqslant \pi^2 \ \forall\, t \in [0, 2\pi]$.

Доведення. Враховуючи твердження леми 1, маємо

$$\left|\int\limits_0^t \left(K(x,t,\tau) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(x,t,s)\,ds\right)d\tau\right| =$$

$$
= \left| \int_0^t \left(K(x,t,\tau) - \frac{1}{2\pi} \int_0^t K(x,t,s)\,ds - \frac{1}{2\pi} \int_t^{2\pi} K(x,t,s)\,ds \right) d\tau \right| =
$$

$$
= \left| \int_0^t K(x,t,\tau)\,d\tau - \frac{t}{2\pi} \int_0^t K(x,t,s)\,ds - \frac{t}{2\pi} \int_t^{2\pi} K(x,t,s)\,ds \right| \leqslant
$$

$$
\leqslant \left| \left(1 - \frac{t}{2\pi}\right) \int_0^t |K(x,t,\tau)| d\tau \right| + \left| \frac{t}{2\pi} \int_t^{2\pi} |K(x,t,s)| ds \right| \leqslant
$$

$$
\leqslant \left(1 - \frac{t}{2\pi}\right) M_0 \int_0^t \Big| t - \tau \Big| d\tau + \Big| \frac{M_0 t}{2\pi} \int_t^{2\pi} \Big| t - s \Big| ds =
$$

$$
= \frac{M_0}{2} \left(1 - \frac{t}{2\pi}\right) (-(t-\tau)^2) \Big|_0^t + \frac{M_0 t}{4\pi} (s-t)^2 \Big|_t^{2\pi} = \frac{M_0}{2} \left(1 - \frac{t}{2\pi}\right) t^2 + \frac{M_0 t}{4\pi} (2\pi - t)^2 =
$$

$$
= \frac{M_0}{4\pi} ((2\pi - t)t^2 + t(2\pi - t)^2) = \frac{M_0}{4\pi} (2\pi t^2 - t^3 + 4\pi^2 t - 4\pi t^2 + t^3) =
$$

$$
= \frac{M_0}{4\pi} (4\pi^2 t - 2\pi t^2) = \frac{M_0}{2} (2\pi t - t^2) \equiv \frac{M_0}{2} \beta_1(t),
$$

що треба було довести.

1. *Самойленко А. М., Хома-Могильська С. Г.* Аналітичний метод відшукання 2π-періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 25–29.

Інститут математики НАН України, Київ
Тернопільський національний економічний університет

Надійшло до редакції 23.02.2010

Academician of the NAS of Ukraine **A. M. Samoilenko, N. H. Khoma, S. H. Khoma-Mohylska**

Properties of a 2π-periodic solution of the boundary-value problem

For the first time in a special function class, an operator which transforms a class of 2π-periodic functions into itself is constructed. Properties of this operator are studied.