УДК 519.112

Т. М. Провотар, К. Д. Протасова

Розбиття графів методом незалежних підмножин

(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)

Запропоновано метод незалежних підмножин, що дозволяє побудувати вершинні розбиття графів з контрольованими індексами підмножин розбиття.

Нехай $\Gamma(V, E)$ — зв'язний граф з множиною вершин V і множиною ребер E. Для довільних вершин x, $y \in V$ позначимо через $d(x, y)$ довжину найкоротшого шляху від x до y. Для довільних вершини $x \in V$, підмножини $A \subseteq V$ та невід'ємного цілого числа m позначимо

$$B(x, m) = \{y \in V \colon d(x, y) \leqslant m\}, \qquad B(A, m) = \bigcup_{a \in A} B(a, m).$$

Підмножини $B(x, m)$ та $B(A, m)$ називаються *кулями* радіусом m навколо x та A.

За означенням, підмножина $A \subseteq V$ має скінченний індекс, якщо знайдеться таке невід'ємне ціле число m, що $V = B(A, m)$. Найменше невід'ємне ціле число m, для якого справедлива ця рівність, називається *індексом* підмножини A і позначається $\operatorname{ind} A$.

За теоремою 1 з [1] (див. також [2, теорема 1.1]), для довільних скінченного графа $\Gamma = \Gamma(V, E)$ та натурального числа r, $|V| \geqslant r$ існує розбиття $V = V_1 \bigcup V_2 \bigcup \cdots \bigcup V_r$ таке, що $\operatorname{ind} V_i \leqslant r - 1$ для кожного $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Розбиття скінченної множини X, $|X| = n$ на r підмножин, $1 \leqslant r < n$, $n = rs + t$, $0 \leqslant t < r$ називають *врівноваженим*, якщо

$$|X_1| = |X_2| = \cdots = |X_t| = s + 1, |X_{t+1}| = |X_{t+2}| = \cdots = |X_r| = s.$$

У випадку $r|n$ ми маємо $|X_1| = |X_2| = \cdots = |X_r|$.

За теоремою 2 з [1] (див. також [2, теорема 1.2]), для довільного скінченного графа $\Gamma(V, E)$ та натурального числа r існує врівноважене розбиття $V = V_1 \bigcup V_2 \bigcup \cdots \bigcup V_r$ таке, що $\operatorname{ind} V_i \leqslant r$ для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Для натурального числа k граф $\Gamma(V, E)$ називається *k-регулярним*, якщо $|B(x, 1)| = k+1$ для кожної вершини $x \in V$. k-Регулярний граф $\Gamma(V, E)$ називається *калейдоскопічним*, якщо існує розфарбування $\chi \colon V \longrightarrow \{0, 1, \ldots, k\}$ множини вершин V $k+1$-м кольором таке, що кожна куля $B(x, 1)$ радіусом 1 не має двох однокольорових вершин. Розфарбування χ задає розбиття $V = \chi^{-1}(0) \bigcup \chi^{-1}(1) \bigcup \cdots \bigcup \chi^{-1}(k)$ і $\operatorname{ind} \chi^{-1}(i) = 1$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Якщо граф $\Gamma(V, E)$ скінченний, то $\chi^{-1}(0) = \chi^{-1}(1) = \cdots = \chi^{-1}(k)$. Таким чином, калейдоскопічні графи оптимальні щодо врівноважених розбиттів. Про калейдоскопічні графи див. [2, гл. 3], [3–5], деякі варіації калейдоскопічних графів розглянуто в [6–8].

Підмножина S множини вершин V графа $\Gamma(V, E)$ називається *незалежною*, якщо $d(u, v) > 1$ для всіх u, $v \in S$. Існування максимальної (за включенням) незалежної множини у скінченному графі очевидне, а для того щоб побудувати таку множину у нескінченному графі, можна використати аксіому вибору.

Метод незалежних підмножин базується на такому твердженні.

Теорема 1. *Нехай $\Gamma(V,E)$ є граф, $|V|>1$, Y — максимальна незалежна підмножина V. Тоді*

1) $\operatorname{ind} Y = \operatorname{ind}(V\setminus Y) = 1$*;*

2) для довільних u, $v\in Y$ існують $y_1,\ldots,y_n\in Y$ такі, що $y_1=u$, $y_n=v$ і $d(y_i,y_{i+1})\leqslant 3$ для кожного $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$;

3) існує максимальна незалежна підмножина Y' така, що для довільних u, $v\in Y'$ знайдуться $y_1,\ldots,y_n\in Y'$ такі, що $y_1=u$, $y_n=v$ і $d(y_i,y_{i+1})\leqslant 2$ для кожного $i\in \in\{1,2,\ldots,n-1\}$.

За теоремою Турана [9], для кожного скінченного графа $\Gamma(V,E)$ існує незалежна підмножина $S\subset V$ така, що $|S|\geqslant\sum\limits_{v\in V}|B(v,1)|^{-1}$. Було б цікаво знайти аналог цієї теореми для незалежних множин, що задовольняють умову (3) теореми 1.

Для довільного графа $\Gamma(V,E)$ позначимо

$$\operatorname{diam}\Gamma(V,E)=\sup\{d(u,v)\colon u,v\in V\}.$$

Якщо $\operatorname{diam}\Gamma(V,E)=\aleph_0$, покладемо $\operatorname{rad}\Gamma=\aleph_0$. Якщо $\operatorname{diam}\Gamma<\aleph_0$ і $v\in V$, позначимо

$$r(v)=\max\{d(v,x)\colon x\in V\},\qquad \operatorname{rad}\Gamma=\min\{r(v)\colon v\in V\}.$$

Теорема 2. *Нехай $\Gamma(V,E)$ — граф, r — натуральне число. Якщо $\operatorname{rad}\Gamma(V,E)>2^{r-1}-1$, то множину V можна розбити $V=V_1\bigcup V_2,\ldots,V_{r+1}$ так, що*

$$\operatorname{ind}V_1=1,\ \operatorname{ind}V_2\leqslant 3,\ \ldots,\ \operatorname{ind}V_i\leqslant 2^i-1,\ \ldots,\ \operatorname{ind}V_r\leqslant 2^r-1,\ \operatorname{ind}V_{r+1}\leqslant 2^r-1.$$

Теорема 3. *Нехай $\Gamma(V,E)$ — граф, $m_1,m_2,\ldots,m_n$ — натуральні числа, такі що $|B(v,m_i)|\geqslant 2^i$ для всіх $v\in V$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Тоді існує розбиття $V=V_1\bigcup V_2,\ldots,V_n$, таке, що кожна підмножина V_i має індекс*

$$\operatorname{ind}V_i\leqslant 2(m_i+2m_{i-1}+2^2m_{i-2}+\cdots+2^{i-1}m_1).$$

Наступні дві теореми свідчать про те, що метод незалежних підмножин можна застосувати для побудови розбиттів нескінченних графів на нескінченні подмножини.

Теорема 4. *Нехай $\Gamma(V,E)$ — нескінченний граф, κ — граничний кардинал. Тоді*

1) множину V можна розбити на зліченне число підмножин скінченного індексу;

2) якщо для кожного кардинала $\kappa'<\kappa$ існує натуральне число m, таке що $|B(v,m)|\geqslant \geqslant\kappa'$ для всіх $v\in V$, то V можна розбити на κ підмножин скінченного індексу.

Теорема 5. *Нехай $\Gamma(V,E)$ — нескінченний граф, m — натуральне число, κ — нескінченний кардинал. Тоді*

1) якщо $|(B(v,1))|=\kappa$ для всіх $v\in V$, то V можна розбити на κ підмножин індексу 1;

2) якщо $|(B(v,m))|=\kappa$ для всіх $v\in V$, то V можна розбити на κ підмножин індексу $\leqslant 3m$.

1. *Protasova K. D.* Уравновешенные разбиения графов // Матем. заметки. – 2006. – **79**. – С. 127–132.
2. *Protasov I., Banakh T.* Ball structures and colorings of groups and graphs // Math. Stud. Monogr. Ser. – 2003. – **11**. – 147 p.
3. *Protasov I. V., Protasova K. D.* Automorphisms of kaleidoscopical graphs // Algebra Discrete Math. – 2007. – **2**. – P. 125–129.
4. *Protasov I. V., Protasova K. D.* Kaleidoscopical graphs and Hamming codes // Voronoi's Impact on Modern Science. – 2008. – Book 4, **2**. – P. 240–245.

5. *Protasova K. D.* Kaleidoscopical graphs // Math. Stud. – 2002. – **18**. – P. 3–9.
6. *Lazebnik F., Woldar A. J.* General properties of some families of graphs defined by system of equations // J. Graph Theory. – 2001. – **38**, No 2. – P. 65–68.
7. *Ustimenko V. A.* Coordinatization of trees and their quotiens // Voronoi's Impact on Modern Science. – 1998. – Book 1, **2**. – P. 125–152.
8. *Wolder A. J.* Rainbow graphs // Codes and designs. – 2002. – **10**. – P. 313–322.
9. *Turan P.* Eine Extremalaufgabe aur der Graphentheorie // Math. Fiz. Lapok. – 1941. – **48**. – P. 436–452.
10. *Protasov I. V.* Quasiray decomposition of infinite graphs // Math. Stud. – 2002. – **17**. – P. 274–276.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 22.03.2010

T. M. Provotar, K. D. Protasova

Partitions of graphs by a method of independent subsets

We present a method of independent subsets for vertex partitions of graphs into subsets of controlled indices. The index of a subset A of the set V of vertices of a graph Γ is the minimal number k such that, for every vertex $v \in V$, there exists a path of length $\leqslant k$ from v to A.