



УДК 538.9:539.215

© 2010

О. І. Герасимов

## Структура та динаміка гранульованих матеріалів

(Представлено академіком НАН України А. Г. Загороднім)

*Проблема опису локальної структури гранульованих матеріалів розглянута на основі концепції існування структурних інваріантів. Доповнений імовірнісним сценарієм переходів проміж квазістаціонарними станами такий підхід дозволяє встановити зв'язки між параметрами локальної структури у вигляді інваріантів і кінетикою впорядкування, яка має прикмети фазових перетворень.*

Гранульовані матеріали (г. м.) є конгломераціями великої кількості дискретних твердих частинок, які можуть бути дисперговані у вакуумі чи у повітрі, або ж поєднані у конденсовану речовину. Зазвичай, проміж окремими гранулами діють лише некогезійні сили відштовхувального характеру, а отже г. м. набувають форми, яка зумовлена граничними умовами (наприклад, геометрією об'єму, що її вміщує), та дією гравітаційного поля. Незважаючи на зовнішню простоту, г. м. за певних умов можуть поводитися як подібно, так і цілком відмінно від звичайних агрегатних станів конденсованої речовини, тобто газів, рідин чи твердих тіл. Різноманітність типів г. м., які є в природі та використовуються у промисловості (а це пісок, гравій, ґрунти, будівельні, харчові, фармакологічні та фармацевтичні матеріали у гранульованій формі та багато інших), зумовлює важливість розуміння природи їх фізичних властивостей. Незважаючи на екстраординарну поведінку г. м., яка зовні часто виглядає як прояв дії саме колективних ефектів, вони є суто механічними системами. Поведінка кожної окремої гранули скоріше має сприйматися як наслідок руху пробної частинки в оточенні тотожних сусідів. Наявність непружних зіткнень, а також відкритий характер (відносно зовнішніх збурень різної природи — періодичних чи імпульсних) зумовлюють складний, суттєво нелінійний характер динаміки гранульованих систем [1–3].

Експериментальні дослідження вказують на те, що специфічні явища, які відбуваються у г. м., виникають завдяки непружним взаємодіям між частинками. Причому ми маємо констатувати, що більшість енергії та кількості моменту імпульсу руху дисипують внаслідок безпосереднього контакту між частинками або з границями об'єму, який обмежує систему.

Фізичні механізми непружної взаємодії частинок між собою та з твердою поверхнею вивчені поки що недостатньо.

З вищенаведених причин дослідження динаміки г. м. на сьогодні, головним чином, пов'язані з їх моделюванням та знаходять своє обґрунтування на основі порівняння з даними числового аналізу та результатами фізичних експериментів. Відповідні моделі оперують найчастіше різними уявленнями про фізичну природу явищ та процесів у системі, що ускладнює побудову загального теоретичного підходу. Числове моделювання, яке є одним з головних джерел параметризації теоретичних моделей, має використовувати послідовний розрахунок непружної взаємодії, яка, навіть у випадку двох частинок, ще не до кінця вивчена. А реальні системи, окрім суттєво багаточастинкового характеру, ще характеризуються складною формою та дисперсією за розмірами гранул.

На відміну від молекулярних конденсованих систем, г. м. допускають безпосереднє вивчення локальної структури як у мікро-, так і у мезо- та макромасштабах. До того ж, динаміка структурних змін, які відбуваються під впливом зовнішніх збурень, також спостерігається безпосередньо.

Це особливо наочно видно у випадку двовимірних систем. Але і тривимірні системи допускають прецизійне вивчення локальної структури за допомогою методу MRIT (magnetic resonance imaging technique).

Таким чином, у випадку гранульованих систем ми маємо майже ідеальну можливість безпосередньо вивчати їхню локальну структуру та динаміку, а також, що є вкрай важливим, — взаємозв'язок між ними. Для того щоб відповідні експериментальні спостереження були належним чином параметризовані, необхідно мати адекватне визначення локальної міри стану, а також відповідний метод вивчення кінетики структурних перетворень.

**Кількісні параметри опису локальної структури.** Обмежимо наш аналіз шляхом розгляду дискретної множини точок  $\{G_\alpha\} \equiv \{\vec{r}^{(\alpha)}\}$  ( $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ ) із координатами  $\vec{r}^{(\alpha)}$ . Ці координати є координатами центрів частинок (гранул), що оточують центральну частинку, яка, у свою чергу, знаходиться на початку обраної системи координат.

Будемо вважати, що геометрична структура  $\{G_\alpha\}$  може бути визначена шляхом її порівняння з альтернативною множиною точок  $\{\Gamma_\alpha\}$ . Множина  $\{\Gamma_\alpha\}$  має бути наперед детермінованою і являти собою зразок ідеальної (впорядкованої) структури (скажімо, гранецентрованої кубічної, гексагональної щільної ґратки тощо). Відомості про  $\{\Gamma_\alpha\}$  можуть бути отримані з альтернативних джерел інформації про локальну будову обраних зразків. Зауважимо, що, наприклад, у випадку типових рідин вибір  $\{\Gamma_\alpha\}$  є істотно обмеженим внаслідок недостатньо повної інформації про їхню локальну структуру [4]. Щодо г. м., їх структуру досить легко можна спостерігати навіть неозброєним оком.

У термінах запропонованого підходу будь-яка частина системи може бути кількісно описана як відхилення від обраної "ідеальної", впорядкованої, детермінованої множини  $\{\Gamma_\alpha\}$ . Іншими словами, ми можемо дивитися на локальну структуру як на збуджений стан попередньо обраного "ідеального" впорядкованого зразка.

Формальний опис локальної структури можна здійснити шляхом введення відповідного локального параметра впорядкування [5, 6].

Повертаючись до набору векторів  $\{\vec{r}^{(\alpha)}\}$ , які завдають конфігурації частинок у групі, обмежимо її розмір масштабом  $r_0$ . Роль  $r_0$  можуть відігравати, скажімо, радіуси координаційних сфер. Формально, множина  $\{\vec{r}^{(\alpha)}\}$  — це вже параметр, який описує структурне впорядкування. Для газів параметр  $\{\vec{r}^{(\alpha)}\}$  сильно флюктує. Навпаки, для кристалів він майже не змінюється.

У подальшому вважатимемо, що флюктуації  $\{\vec{r}^{(\alpha)}\}$ , які у випадку г. м. виникають внаслідок зовнішніх збурень, досить малі (мова тут іде, безумовно, про інші, у порівнянні до

молекулярних, порядки величин малі). Додамо, що флуктуації є наслідком як зміни довжини, так і відносних кутів між векторами множини  $\{\vec{r}^{(a)}\}$ .

Для опису структури у масштабах, які перевищують розміри однієї частинки, зручніше користуватися тензорними величинами. Останні можуть бути введені за такими правилами:

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{(t)} = \sum_{(a)} \omega(\vec{r}^{(a)}) t_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{(a)}, \quad T_{lm}^{(0)} = \sum_{(a)} \tilde{\omega}(\vec{r}^{(a)}) t_{lm}^{(a)}, \quad (1)$$

де  $t_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{(a)} = \overline{\vec{r}_{\alpha_1}^{(a)} \dots \vec{r}_{\alpha_l}^{(a)}}$ ,  $t_{lm}^{(a)} = Y_{lm}(\Omega^{(a)})$ ,  $l = 0, 1, \dots$ ;  $\Omega^{(a)} = \{\varphi^{(a)}, \vartheta^{(a)}\}$  позначає полярні та азимутальні кути, що відповідають напрямку  $\vec{r}^{(a)}/|\vec{r}^{(a)}|$ ;  $Y_{lm}(\Omega^{(a)})$  — сферичні функції, а  $\vec{r}_{\alpha_1}^{(a)} \dots \vec{r}_{\alpha_l}^{(a)}$  є декартів тензор;  $t_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{(a)}$  — незвідна частина тензору  $\vec{r}_{\alpha_1}^{(a)} \dots \vec{r}_{\alpha_l}^{(a)}$ .

У (1)  $\omega(\vec{r}^{(a)})$  та  $\tilde{\omega}(\vec{r}^{(a)})$  — функції, які визначають статистичну вагу внесків до  $T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{(t)}$  від різних координаційних оболонок (сфер), та до  $T_{lm}^{(0)}$  від різних орієнтаційних конфігурацій, відповідно. Тензори  $T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{(t)}$  та  $T_{lm}^{(0)}$  можна розглядати як трансляційну та орієнтаційну компоненти параметра порядку. Крім того,  $t_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{(a)}$  і  $T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$  можуть бути визначені через лінійні комбінації  $t_{lm}^{(a)}$  та  $T_{lm}$ . Тензор  $T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$  належить до базису тривимірної обертальної групи симетрії  $O_3$ . Трансляційний та орієнтаційний параметри порядку, які визначаються за допомогою (1), мають  $2l + 1$  незалежних компонентів, за допомогою яких можуть бути побудовані  $2(l - 1)$  незалежних інваріантів  $\{\Psi_l^{(k)}\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2(l - 1)$ . Зауважимо, що  $T^{(0)}$  дає усереднене за  $V_0$  (які оточують точку  $\vec{r}_0$ ) значення густини числа частинок. Величина

$$T_{ij}^{(2)} = \tilde{T}_{ij}^{(2)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tilde{T}_{ii}^{(2)} \quad (2)$$

визначає густину квадрупольного моменту.

Величини  $T_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(4)}$  та  $T_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(5)}$  описують впорядковані стани у системах із відповідною детермінованою кристалографічною симетрією.

Рівняння (1), записані з урахуванням того, що всі частинки — гранули, ідентичні одна до одної. Якщо ця умова порушується, то потрібно записати множини відповідних тензорних величин для кожної з компонент.

Експериментальні дослідження г.м. показують, що в більшості випадків у структурі г.м. спостерігаються водночас впорядковані і невпорядковані ділянки (домени структури) [12–14]. Під впливом зовнішніх збурень такі домени деформуються і змінюють початкову симетрію.

**Локальна структура у фазовому просторі структурних інваріантів.** Зважаючи на чутливість структурних інваріантів до масштабною ієрархії флуктуацій, ми очікуємо, що для кожної величини  $l$  існує характерний масштаб зсуву  $\xi_l$ , який відповідає вибраному відхиленню від  $\Psi_l^k$ . Флуктуації структурних інваріантів супроводжуються зменшенням  $\xi_l$  із зростанням  $l$  до границі, коли  $\xi$  можна порівняти із відповідним  $\xi_l$ . У цих умовах відповідний інваріант  $\Psi_l^k$  флюктує настільки сильно, що система здатна переходити до інших станів із відмінною симетрією.

Якщо тривимірний домен відповідає гранецентрованої кубічній, гексагональній густій або ікосаедричній симетріям, він має складатися з однієї центральної та 12 “зовнішніх” гранул, які розподілені на однакових відстанях від центральної. Причому кожна з 12 частинок, які належать до обраної ділянки, може змінювати своє положення на поверхні сфери радіусом  $\xi$ , розташованої навколо центральної гранули.

Дотримуючись підходу, описаного вище, введемо два параметри порядку, а саме: просторовий —  $R_{lm}$  і орієнтаційний —  $Q_{lm}$

$$R_{lm} = \frac{1}{N} \sum_a Y_{lm}(\Omega^{(a)}) |\vec{r}^{(a)}|^l, \quad Q_{lm} = \frac{1}{N} \sum_a Y_{lm}(\Omega^{(a)}). \quad (3)$$

Відповідні структурні інваріанти, побудовані за допомогою (3), можуть бути визначені так:

$$R_l^2 = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |R_{lm}|^2, \quad Q_l^2 = \frac{2\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |Q_{lm}|^2. \quad (4)$$

У відсутності флуктуацій у групі гранул ( $R_l = Q_l$ ) структурні інваріанти характеризуються величинами, наведеними у табл. 1.

Аналіз даних, наведених у табл. 1, показує, що, зокрема, інваріант  $Q_6$  є дуже чутливим до будь-якого типу впорядкування і, таким чином, є параметром, який характеризує різницю у локальній структурі доменів із різними типами симетрії.

**Загальна концепція ймовірнісного підходу.** Для вивчення обмеженої множини  $\{\Gamma_i\}$  обраних зразків введемо розподіл ймовірностей  $\rho(\Psi)$  флуктуацій інваріантів  $\Psi_l$  у фазовому просторі. Припустимо, що разом із  $\rho(\Psi)$  існує розподіл  $\rho_n(\Psi)$ . При цьому  $\rho_n(\Psi)$  описує стани, які можуть бути інтерпретовані як деформовані відносно зразків з обраними симетріями. Покладемо, що

$$dW = \rho_n(\Psi^{(0)}; \xi) d\Psi^{(0)} \quad (5)$$

описує ймовірність знайти величину інваріанта  $\Psi_l$ , яка в свою чергу завдає флуктуації обраних зразків  $\{\Gamma_n\}$  в об'ємі  $d\Psi^{(0)} = \prod_{(k)} d\Psi_k^{(0)}$  поблизу  $\{\Psi_k^{(0)}\}$ . Тоді множина нерівностей типу

$$\{\rho_n(\Psi)\} < \text{const}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

визначає ділянки у фазовому просторі, які відповідають поточним деформованим станам, що спостерігаються.

Якщо радіус  $\xi$  є малим, розподіли  $\rho_1(\Psi)$  та  $\rho_2(\Psi)$  не перетинаються. У такому випадку кожна точка  $\Psi$  являє деформований відносно деякого обраного зразка стан  $\{\Gamma_i\}$  і не може одночасно відповідати іншому  $\{\Gamma_j\}$ , тобто ( $i \neq j$ ).

Із зростанням флуктуацій  $\xi$  вище відповідного значення  $\xi > \xi_l$  два сусідні розподіли можуть перетинатися. У цьому випадку  $\Psi$  із певною ймовірністю може відповідати двом різним зразкам.

Таблиця 1. Структурні інваріанти  $\{Q_i\}$

Тип ґратки	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$	$Q_7$	$Q_8$	$Q_9$	$Q_{10}$
Гранецентрирована кубічна ґратка	0	0	0	0,1909	0	0,5745	0	0,4039	0	0,0129
Гексагональна густа ґратка	0	0	0,0761	0,0972	0,2516	0,4848	0,3108	0,3170	0,1379	0,0102
Ікосаедрична ґратка	0	0	0	0	0	0,6633	0	0	0	0,3629

Можна ввести функцію розпізнавання зразків, яка у разі необхідності вибору між двома виділеними станами  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  має визначатися за таким правилом:

$$E = \int \min\{\rho_1(\Psi); \rho_2(\Psi)\} d\Psi. \quad (7)$$

Інтегрування в (7) виконується за фазовим простором інваріантів, де  $\rho_i(\Psi)$  ( $i = 1, 2$ ) характеризує флуктуації відносно зразків  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$ . Функція  $E$ , яка задовольняє (7), відповідає, таким чином, умові мінімізації помилки при розпізнаванні структур зразків.

Припустимо, що статистика флуктуацій інваріантів задається ефективним гамільтоніаном  $F(\Psi)$ . Обраний стан  $\{\Psi_k^{(0)}\}$  будемо вважати стаціонарним. Тоді густину ймовірностей флуктуацій  $\rho(\Psi)$  можемо записати так:

$$\rho(\Psi) \propto \exp\{-F(\Psi)\}. \quad (8)$$

Функція  $F(\Psi)$  допускає розклад у ряд Тейлора поблизу множини станів  $\{\Psi_k^{(0)}\}$ , які вважаються найбільш ймовірними, а саме:

$$F(\Psi) = F(\Psi^{(0)}) + \frac{1}{2!} \sum_{k,l} \beta_{kl} \Psi'_k \Psi'_l + \frac{1}{4!} \sum_{k,l,m,n} \gamma_{klmn} \Psi'_k \Psi'_l \Psi'_m \Psi'_n + \dots \quad (9)$$

Апроксимація розкладу (9) квадратичною формою дозволяє отримати багатовимірний розподіл для  $\rho(\Psi)$  у гауссовій формі

$$\rho_i(\Psi) = \prod_{(l)} \rho_i^{(l)}(\Psi_l); \quad \rho_i^{(l)}(\Psi_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^{(l)}}} \exp\left\{-\frac{(\Psi_l - \langle\Psi_l\rangle_i)^2}{2(\sigma_i^{(l)})^2}\right\}, \quad (10)$$

де  $\sigma_i^{(l)}$  — середньоквадратичні відхилення;  $\Psi' = \Psi - \Psi^{(0)}$ ;  $\beta_{kl}$  та  $\gamma_{klmn}$  — матриці, власні значення яких можуть бути отримані з експериментальних досліджень локальної структури.

Кінетичне рівняння описує модельну флуктуаційну кінетику як релаксацію структурних інваріантів  $\Psi$  поблизу стаціонарного стану  $\Psi^{(0)}$ , ґрунтується на співвідношеннях (8) та (10) і може бути записане у такому вигляді:

$$\frac{\partial\Psi'}{\partial t'} = \rho\{-F(\Psi')\}. \quad (11)$$

Рівняння типу (11) із урахуванням (9) за формою є типовим диференціальним рівнянням із флуктуаційної теорії фазових перетворень [7] і відтворює відповідні типи кінетики.

**Квазістатистична модель дисипативних станів.** Для виявлення зв'язків геометричних та топологічних характеристик г.м. з динамікою їх локальних конфігурацій введемо до розгляду конфігураційну функцію  $Z$  для множин  $N$  тотожних частинок у об'ємі  $V$ . Функція  $Z$  має виглядати як сума за конфігураціями станів  $\{\alpha\}$ , які забезпечують локальний мінімум потенціальної енергії  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ , тобто суто квазістаціонарних станів, які визначаються експериментально, шляхом стробоскопічних спостережень слабо збурених г.с. Очевидно, що кожний стоп-кадр робить нашу систему “замороженою” у поточному квазістаціонарному стані [8–10]. Спираючись, таким чином, на апріорне існування таких квазістаціонарних станів, постулюємо, що ймовірність знайти частинку — гранулу у стані,

який відповідає даній квазістаціонарній конфігурації, є максимальною. Відповідно конфігураційна функція  $Z$  має такий вигляд:

$$Z = \sum_{\alpha} e^{-\beta \tilde{F}_{\alpha}} = \sum_{\alpha} \frac{1}{N! \Lambda^{3N}} \int_{\{\Gamma_{\alpha}\}} d\vec{r}_1 \cdots \int d\vec{r}_N e^{-\beta U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}, \quad (12)$$

де  $\beta = (k_B T)^{-1}$ ;  $\Lambda = h/(2\pi m k_B T)^{1/2}$ ;  $m$  — маса гранули, інтеграл у (12) береться за областю  $\{\Gamma_{\alpha}\}$ , що позначає об'єми у конфігураційному просторі, визначені навколо станів  $\{\vec{r}_1^{\alpha} \cdots \vec{r}_N^{\alpha}\}$ ;  $\tilde{F}_{\alpha}$  — вільна енергія. У границях, коли  $\{\Gamma_{\alpha}\}$  не перетинаються, співвідношення (12) наближаються до типового визначення конфігураційного інтегралу.

Спільне використання концепції вільного об'єму та гіпотези максимальної ймовірності знайти різні комірки ємністю в один стан, який є одночастинково заповненим, дозволяє розглядати вільну енергію як суму за вкладками  $\{i\}$ , що повністю описуються своїми геометричними та топологічними параметрами  $\{n_i^{\alpha}\} \equiv \{n\}$ . Як наслідок,  $\tilde{F}_{\alpha}$  може бути апроксимована такою формою:

$$\tilde{F}_{\alpha} = \tilde{F}(\{N(n)\}),$$

де  $\{N(n)\}$  позначає кількість комірок, кожна з яких характеризується множиною  $n$ . Відповідно  $Z$  може бути апроксимована формою

$$Z = \sum_{\{N(n)\}} \Omega(\{N(n)\}) e^{-\beta \tilde{F}(\{N(n)\})},$$

де  $\Omega(\{N(n)\})$  — перелік просторових розбиттів на комірки множини  $\{N(n)\}$ .

Комірки зі станів, що є невпорядкованими, мають різну форму та розміри. Наприклад, у випадку гранецентрованої кубічної кристалічної упаковки,  $\Omega = 1$ . Звернемо увагу на те, що величина  $\Omega$  може бути лише промодельована або розрахована чисельно (у сенсі оцінки її екстремумів). Послідовне і самоузгоджене визначення цієї величини є предметом окремої задачі.

Насправді, максимальна кількість окремих конфігурацій  $\Omega$  задовольняє нерівність

$$\Omega(\{N(n)\}) \leq \frac{N!}{\prod_{(n)} N(n)!}.$$

У випадку, коли загальна кількість окремих конфігурацій відповідатиме мінімуму загальної потенціальної енергії, питома енергія  $W$  для однієї частинки може бути записана у вигляді  $W = (\ln \Omega)/N$ .

Дослідження зразків г.м. із визначеною симетрією пакування дозволило встановити, зокрема, що динаміка релаксації відповідного параметра впорядкування навколо різних стаціонарних станів може відповідати законам ростягнутої експоненти Вогеля–Фулчера, або ж у загальному випадку описується за допомогою функцій типу Міттаг–Лефлера, які в асимптотичних границях відтворюють вищезазначені закони [11–13].

Таким чином, розвинуто квазістатистичий підхід до опису динамічної структури гранульованих матеріалів, який базується на припущенні про існування квазістаціонарних станів у фазовому просторі структурних інваріантів. Можливі сценарії релаксації відповідних

параметрів упорядкування, які мають певні прикмети кінетики фазових перетворень, підтверджуються експериментальними даними [3, 11–14].

Автор глибоко вдячний А. Г. Загородньому та Н. Вандевалле за плідне обговорення результатів роботи.

1. Jaeger H. M., Nagel S. R., Behringer R. P. The physics of granular materials // Rev. Mod. Phys. – 1996. – **68**. – P. 1259–1273.
2. Duran J. Sands, Powders and Grains. – New York: Springer, 2000. – 200 p.
3. Mehta A. Granular Physics. – Cambridge: CUP, 2009. – 318 p.
4. Hansen J. P., McDonald I. R. Theory of simple liquids. – New York: Academic Press, 2006. – 416 p.
5. Patashinskiĭ A. Z., Shumilo B. I. Theory of condensed matter based on the hypothesis of a local crystalline order // JETP. – 1985. – **62**, No 1. – P. 177–184.
6. Steinhardt P. J., Nelson D. R., Ronchetti M. Bond-orientational order in liquids and glasses // Phys. Rev. B. – 1983. – **28**. – P. 784–805.
7. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – Москва: Наука, 1982. – 381 с.
8. Gerasimov O. I., Schram P. P. J. M., Kitahara K. Kinetics of granular segregation // Ukr. J. Phys. – 2003. – **48**, No 8. – P. 885–896.
9. Gerasymov O. I., Khudyntsev N. N., Klymenkov O. A., Spivak A. Ya. The kinetics of processes occurring in granular materials in the field of vibroaccelerations // Ibid. – 2005. – **50**, No 6. – P. 624–632.
10. Герасимов О. І., Вандевалле Н., Співак А. Я. та ін. Стационарні стани у 1D системі непружних частинок // Укр. фіз. журн. – 2008. – **53**, № 11. – С. 1129–1137.
11. Ribiere P., Richard P., Bideau D., Delannay R. Experimental compaction of anisotropic granular media // Eur. Phys. J. E. – 2005. – **16**, No 4. – P. 415–420.
12. Lumay G., Vandewalle N., Bodson C. et al. Linking compaction dynamics to the flow properties of powders // Appl. Phys. Lett. – 2006. – **89**, No 9. – P. 093505.
13. Vandewalle N., Lumay G., Gerasymov O., Ludewig F. The influence of grain shape, friction and cohesion on granular compaction dynamics // Eur. Phys. J. E. – 2007. – **22**. – P. 241–248.
14. Reis P. M., Ingale R. A., Shattuck M. D. Crystallization of a quasi-two-dimensional granular fluid // Phys. Rev. Lett. – 2006. – **96**. – P. 258001.

Одеський державний екологічний університет

Надійшло до редакції 07.04.2010

**O. I. Gerasymov**

## **Structure and dynamics of granular materials**

*The problem of the description of a local structure of granular materials is discussed within the concept of the existence of the structural invariants. The supplement of this approach with probabilistic arguments concerning the crossover and the kinetics of transitions between the states of different measures gives the relevant picture of the evolution with a reminiscence of a phase transition between states with different structural orders.*