УДК 533

Я. Ф. Лелеко, член-корреспондент НАН Украины **К. Н. Степанов**

Ионно-звуковые колебания в сильнонеизотермической слабоионизированной неоднородной водородной плазме

Отримано стаціонарний розподіл параметрів сильнонеізотермічної слабкоіонізованої водневої плазми у гідродинамічному наближенні в області квазінейтральності та у перехідному шарі між діалектриком та плазмою з урахуванням ефектів іонізації, перезарядження, дифузії, в'язкості та самоузгодженого електричного поля. Визначено функцію розподілу іонів за швидкостями за отриманим розподілом потенціалу самоузгодженого поля. Знайдено залежності частоти та декременту затухання іонно-звукових коливань від хвильового вектора, що пов'язаний з зіткненнями частинок у плазмі, з одержаними параметрами у локальному наближенні.

1. В настоящей работе исследованы распространение и поглощение объемных ионно-звуковых колебаний в сильнонеизотермической слабоионизированной водородной плазме в локальном приближении. Расчет равновесных параметров плазмы проведен в гидродинамическом приближении с учетом эффектов ионизации, перезарядки, диффузии, вязкости и самосогласованного электрического поля, определяющего появление переходного (дебаевского) слоя на границе плазмы вследствие более быстрого ухода электронов на стенку.

В работах [1, 2] подобная задача решалась в кинетическом приближении и с помощью вероятностного подхода. Из кинетического уравнения получена функция распределения ионов по скоростям с помощью найденного распределения потенциала самосогласованного поля. В заключительной части работы найдены зависимости реальной и мнимой частей частоты объемных ионно-звуковых колебаний как функции волнового вектора в локальном приближении для полученных равновесных параметров плазмы.

2. По аналогии с теориями Шоттки [3] и Ленгмюра–Тонкса [4] предполагалось, что плазма сосредоточена в области $-L \leqslant x \leqslant L$, однородна по осям y, z и состоит из атомов и ионов атомарного водорода и электронов. Температуры частиц плазмы и плотность атомов водорода не зависят от координат. Ионизация осуществляется прямым электронным ударом, а рекомбинация — на стенке. Распределение потенциала в плазме монотонно. Области $x \geqslant L$ и $x \leqslant -L$ заполнены диэлектриком. При выполнении этих условий для стационарного случая газодинамические уравнения движения и непрерывности для ионов и электронов, соответственно, и уравнение Пуассона имеют следующий вид:

$$\frac{1}{2}(v_i^2)' = -\frac{e}{m_i}\varphi' - \nu_i v_i - \frac{T_i}{m_i}\frac{n_i'}{n_i}, \tag{1}$$

$$(n_i v_i)' = \alpha n_e, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}(v_e^2)' = \frac{e}{m_e}\varphi' - \nu_e v_e - \frac{T_e}{m_e}\frac{n_e'}{n_e}, \tag{3}$$

$$(n_e v_e)' = \alpha n_e, \tag{4}$$

$$\varphi'' = 4\pi e(n_e - n_i), \tag{5}$$

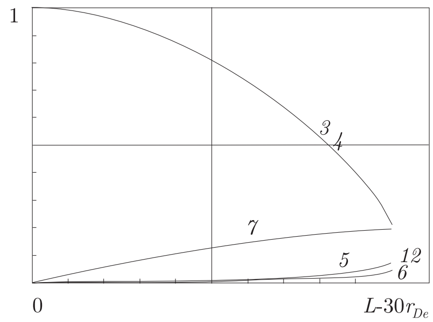

Рис. 1

где v, n, T, m, ν — гидродинамическая скорость, плотность, температура, масса, эффективная частота столкновений ионов или электронов согласно нижним индексам; e — элементарный заряд; φ — потенциал самосогласованного поля; α — частота ионизации, штрихом обозначена производная по x.

Выбраны следующие значения граничных условий при $x = 0$ и постоянных параметров плазмы: $v_i(0) = v_e(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $n_i(0) = n_e(0) = N_0 = 10^{12}$ см$^{-3}$, $n_n = 10^{15}$ см$^{-3}$, $T_e = 2$ эВ, $T_i = T_n = 0{,}05 \cdot T_e = 0{,}1$ эВ, где n_n и T_n — плотность и температура нейтральных атомов водорода. Граничное условие в точке контакта плазмы со стенкой определим из условия равенства гидродинамического потока ионов (или электронов) и потока электронов из уравнения стандартной теории тока на зонд [5] (при отсутствии эффектов отражения и эмиссии электронов со стенки):

$$\varGamma_i(L) = n_i(L)v_i(L) = \frac{1}{4}N_0\sqrt{\frac{8T_e}{\pi m_e}}\exp\left(\frac{e\varphi_L}{T_e}\right).$$

Частоты ионизации и столкновений рассчитаны с помощью соотношений: $\alpha = \overline{\sigma_i v_e} n_n$, $\nu_i = \nu_{ex} + \alpha$, $\nu_e = \nu_{en}$; $\nu_{ex} = \sigma_{ex} n_n v_{Ti}$, $\nu_{en} = \sigma_{en} n_n v_{Te}$, где ν_{ex}, σ_{ex} — частота и сечение перезарядки ионов на атомах водорода; ν_{en}, σ_{en} — частота и сечение упругих столкновений электронов и атомов водорода; $v_{Ti} = \sqrt{T_i/m_i}$, $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$ — тепловые скорости электронов и ионов, соответственно. Для величин σ_{ex} и σ_{en} были взяты табличные значения для соответствующих температур. Усредненное произведение сечения ионизации на скорость налетающих электронов для малых значений T_e рассчитано с помощью интерполяционной формулы:

$$\overline{\sigma_i v_e} = 9{,}8 \cdot 10^{-8}\frac{\sqrt{x(x+1)}}{x + 0{,}73}\exp(-x)\ \text{см}^{-1}\text{с}^{-1}, \qquad x = \frac{13{,}6}{T_e}.$$

Для плазмы с указанными выше параметрами частота ионизации, эффективные частоты столкновений и тепловые скорости ионов и электронов, соответственно, принимают следующие значения: $\alpha = 1{,}05 \cdot 10^5$ с$^{-1}$, $\nu_i = 2{,}18 \cdot 10^6$ с$^{-1}$, $\nu_e = 2{,}55 \cdot 10^8$ с $^{-1}$, $v_{Ti} = 3{,}09 \cdot 10^5$ см/с, $v_{Te} = 5{,}93 \cdot 10^7$ см/с. Численное решение системы уравнений (1)–(5) с заданными выше граничными условиями представлено на рис. 1 и 2. Цифрами обозначены зависимости от x/r_D следующих величин: *1* — $v_i/(20v_s)$; *2* — $v_e/(20v_s)$; *3* — n_i/N_0; *4* — n_e/N_0; *5* — $(-e\varphi)/(20T_e)$; *6* — $(r_{De}e\varphi')/(2T_e)$; *7* — $\varGamma_i/(N_0 v_s))$, где $r_{De} = \sqrt{T_e/(4\pi e^2 N_0)} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}$ см — радиус Дебая–Хюккеля; $v_s = \sqrt{T_e/m_i} = 1{,}38 \cdot 10^6$ см/с — скорость ионного звука. Полуширина плазмы $L = 3322{,}24 r_{De} = 3{,}49$ см. На рис. 1 показано пространственное распределение параметров плазмы в области $0 \leqslant x \leqslant L - 30r_{De}$, а на рис. 2 — в переходном слое шириной

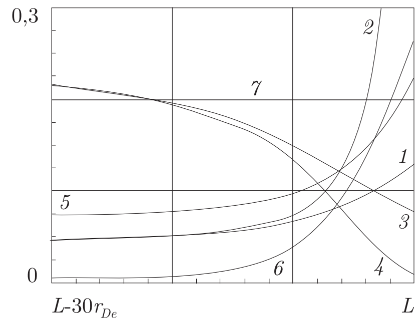

Рис. 2

$30r_{De}$ на границе раздела диэлектрик — плазма. Интегрирование системы уравнений (1)–(5) вблизи точки $v_i = v_s$ производится с помощью условия квазинейтральности $n_i = n_e$ вместо уравнения (5), что позволяет избавиться от сингулярности. При учете в правых частях уравнений (1) и (3) членов, описывающих вязкость, сингулярность в точке $v_i = v_s$ не наблюдается.

3. Предположим, что атомы водорода имеют максвелловское распределение по скоростям. Тогда для нахождения стационарной функции распределения ионов по скоростям f воспользуемся кинетическим уравнением [2]

$$v_x f' = (\nu n_{ix} + \alpha n_{hex}) f_{0x} - \nu f, \tag{6}$$

где $f = f(x, \varepsilon)$; $\varepsilon = m_i v_x^2/2 + e\varphi_x$ — энергия ионов; $v_x = \sqrt{2(\varepsilon - e\varphi_x)/m_i}$ — скорость ионов; $\nu = \nu_{ex}$; $f_{0x} = 1/(\sqrt{2\pi} v_{Ti}) \exp(-v_x^2/(2v_{Ti}^2))$. Нижний индекс x в этом разделе означает принадлежность к точке с координатой x. Первый член в правой части уравнения (6) описывает увеличение числа ионов за счет перезарядки и ионизации соответственно, второй — их уменьшение за счет перезарядки. Скорости ионов в момент рождения в результате перезарядки или ионизации имеют максвелловское распределение по скоростям с температурой нейтральных атомов водорода. В качестве граничного условия для (6) в случае, когда все налетающие ионы поглощаются (рекомбинируют) на стенке, будем считать, что ионы, летящие от стенки, отсутствуют. Тогда решение уравнения (6) для ионов, летящих от стенки ($v_x < 0$) и в противоположном направлении ($v_x > 0$), имеют, соответственно, следующий вид:

$$f^-_{x,v_x} = \frac{\nu}{\nu + \alpha} \int\limits_x^L d\xi \frac{\nu n_{i\xi} + \alpha n_{e\xi}}{v_\xi} f_{0\xi} \exp\left(-\int\limits_x^\xi \frac{d\zeta}{v_\zeta}\right), \tag{7}$$

$$f^+_{x,v_x} = f_{x_t,v_{x_t}} \exp\left(-\int\limits_{x_t}^x \frac{d\zeta}{v_\zeta}\right) + \frac{\nu}{\nu + \alpha} \int\limits_{x_t}^x d\xi \frac{\nu n_{i\xi} + \alpha n_{e\xi}}{v_\xi} f_{0\xi} \exp\left(-\int\limits_\xi^x \frac{d\zeta}{v_\zeta}\right), \tag{8}$$

где

$$v_\xi = \sqrt{v_x^2 + \frac{2e(\varphi_x - \varphi_\xi)}{m_i}}, \qquad f_{x_t,v_{x_t}} = \int\limits_{x_t}^L d\xi \frac{\nu n_{i\xi} + \alpha n_{e\xi}}{v_\xi} f_{0\xi} \exp\left(-\int\limits_{x_t}^\xi \frac{d\zeta}{v_\zeta}\right).$$

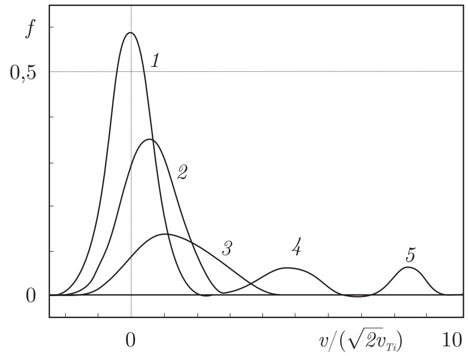

Рис. 3

Для частиц, энергия которых $\varepsilon < 0$, x_t — точка поворота и, следовательно, $v_{x_t} = 0$ и $\varepsilon = e\varphi_{x_t}$, для частиц с положительной энергий $\varepsilon \geqslant 0$, $x_t = 0$. Распределение по скоростям в середине плазмы $f^-_{x=0,v_x} = f^+_{x=0,v_x}$ вследствие симметрии плазмы. Подставляя в (7) и (8) полученные при гидродинамическом рассмотрении зависимости $n_i(x)$ и $\varphi(x)$, находим распределение ионов по скоростям $f\big(v_i/(\sqrt{2}v_{Ti})\big)$ для различных значений x/r_D, которое представлено на рис. 3. Зависимость *1* соответствует $x = 0$; *2* — $x = 2000r_D$; *3* — $x = 3000r_D$; *4* — $x = L - 10r_D$; *5* — $x = L$.

Было произведено сравнение распределения плотности ионов, полученное при гидродинамическом рассмотрении и при интегрировании функции распределения ионов (7), (8) по всему пространству скоростей. Различие между результатами в области $(L-30r_{De} \leqslant x \leqslant L)$ составляет $\leqslant 10\%$. Применение гидродинамики в данной области не совсем корректно из-за очень редких столкновений. Однако в этой узкой области, где равновесные параметры плазмы изменяются существенно под действием сильного согласованного электрического поля, вызванного разделением зарядов, диссипативные члены в уравнениях (1)–(4), полученные из кинетических уравнений в гидродинамическом приближении, малы и ими можно пренебрегать. В глубине плазмы различие между результатами не превышает 1%. Такой сравнительный анализ позволяет говорить о хорошем соответствии сравниваемых приближений.

4. В рассмотренной выше сильнонеизотермической плазме $(T_i \ll T_e)$ возможно возникновение ионно-звуковых колебаний.

Будем считать, что все переменные, которые описывают колебания, малы по сравнению со стационарными равновесными величинами и изменяются в локальном приближении как $\exp\Big[i\Big(\int\limits_0^x k_x(\xi)d\xi + k_y y - \omega t\Big)\Big]$, где ω — частота; k_x и k_y — компоненты волнового вектора.

Для описания движения электронов и ионов воспользуемся совместно с уравнением Пуассона линеаризованной системой гидродинамических уравнений, справедливых при $\mathrm{Re}\,\omega \gg \mathrm{Im}\,\omega$ и для редких соударений, приводящих к появлению затухания $\mathrm{Im}\,\omega$, определяемого диссипативными слагаемыми с точностью до коэффициентов порядка единицы:

$$(-i\omega_1 + v'_{0i})n_i + (ik_x n_{0i} + n'_{0i})v_{ix} + ik_y n_{0i} v_{iy} = \alpha n_e, \tag{9}$$

$$(-i\omega_1 + \nu_i + v'_{0i} + \eta_i k_x^2)v_{ix} = -ik_x\frac{e}{m_i}\varphi - \frac{ik_x n_{0i} - n'_{0i}}{n_{0i}^2}v_{Ti}^2 n_i, \tag{10}$$

$$(-i\omega_1 + \nu_i + \eta_i k_y^2)v_{iy} = -ik_y\bigg(\frac{e}{m_i}\varphi + \frac{v_{Ti}^2}{n_{0i}}n_i\bigg), \tag{11}$$

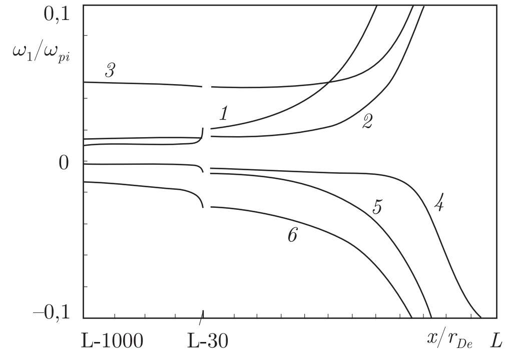

Рис. 4

$$(-i\omega_2 + v'_{0e})n_e + (ik_x n_{0e} + n'_{0e})v_{ex} + ik_y n_{0e} v_{ey} = \alpha n_e, \tag{12}$$

$$(-i\omega_2 + \nu_e + v'_{0e} + \eta_e k_x^2)v_{ex} = ik_x \frac{e}{m_e}\varphi - \frac{ik_x n_{0e} - n'_{0e}}{n_{0e}^2} v_{Te}^2 n_e, \tag{13}$$

$$(-i\omega_2 + \nu_e + \eta_e k_y^2)v_{ey} = ik_y\left(\frac{e}{m_e}\varphi - \frac{v_{Te}^2}{n_{0e}} n_e\right), \tag{14}$$

$$-k^2\varphi = 4\pi e(n_e - n_i), \tag{15}$$

где $\omega_{1,2} = \omega - k_x v_{0i,e}$; $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$; $\eta_i = v_{Ti}^2/(\nu_{ci} + \nu_{ex})$; $\eta_e = v_{Te}^2/(2\nu_{ce} + \nu_{en})$; $\nu_{ci,e} = \sigma_{ci,e} N_0 v_{Ti,e}$; $\sigma_{ci,e} = \pi(e^2/T_{i,e})^2 L_{i,e}$; $L_i = \ln(\sqrt{T_i^3/(4\pi e^6 n_{0i})})$; $L_e = \ln(T_e\sqrt{T_i/(4\pi e^6 n_{0i})})$; $\eta_{i,e}$; $\nu_{ci,e}$; $\sigma_{ci,e}$; $L_{i,e}$ — коэффициент вязкости, частота и сечение кулоновских столкновений, кулоновский логарифм ионов и электронов соответственно. Индекс 0 показывает принадлежность гидродинамической скорости и плотности к равновесному состоянию. Для данных параметров плазмы $\eta_i = 7{,}69 \cdot 10^3$ см^2/с, $\eta_e = 1{,}3 \cdot 10^7$ см^2/с, $\nu_{ci} = 1{,}02 \cdot 10^7$ с$^{-1}$, $\nu_{ce} = 1{,}56 \cdot 10^7$ с$^{-1}$. В левых частях уравнений (10), (13) и (15) пренебрегается членами $ik'_x\eta_i v_{ix}$, $ik'_x\eta_e v_{ex}$ и $ik'_x\varphi$ по сравнению с $k^2\eta_i v_{ix}$, $k^2\eta_e v_{ex}$ и $k^2\varphi$ в соответствии с локальным приближением.

Систему уравнений (9)–(15) можно преобразовать в дисперсионное уравнение 6-й степени относительно ω, два корня которого близки к бесстолкновительным ионно-звуковым колебаниям. Численное решение этого уравнения в области плазмы, граничащей с диэлектриком, размером $1000r_D$ показано на рис. 4 для случая $k_y r_{De} = 0{,}01$, $\mathrm{Re}\,\omega_1 > 0$. Цифрами *1*, *2*, *3* обозначены реальные части ω_1, а цифрами *4*, *5*, *6* — мнимые для случаев $k_x \ll k_y$, $k_x r_{De} = 0{,}01$ и 0,05 соответственно. Графики представлены в двух масштабах. Это связано с тем, что в области квазинейтральности ($x \leqslant L - 30r_{De}$) значения частот изменяются слабо в отличие от переходного слоя ($L - 30r_{De} \leqslant x \leqslant L$), в котором существенно меняются равновесные параметры плазмы.

В области квазинейтральности можно получить приближенные выражения для реальной и мнимой частей решения дисперсионного уравнения, соответствующего положительному значению ω_1, для различных значений $k_x r_{De}$.

Для $k_x \ll k_y$ $kr_{De} = 0{,}01$

$$\omega_{1Re} = kv_s\sqrt{1 + \frac{T_i}{T_e} + \frac{1}{k^2}\left(\frac{n'_{i0}}{n_{i0}}\right)^2\left(\frac{\eta_e k^2}{\nu_e} + 1\right)}, \tag{16}$$

$$\omega_{Im} = -\frac{\nu_i}{2} - \frac{\eta_i k^2}{2} - \frac{m_e}{m_i}\frac{\eta_e k^2}{2} - \frac{v'_{i0}}{2} - \frac{m_e}{m_i}\frac{\nu_e}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\eta_e k^2 v_s^2}{2\nu_e^2}\left(\frac{n'_{i0}}{n_{i0}}\right)^2. \tag{17}$$

Для $k_x r_{De} = 0{,}01$ $kr_{De} = \sqrt{2}\cdot 0{,}01$

$$\omega_{1Re} = kv_s + \frac{T_i}{T_e}\frac{kv_s}{2} + \frac{v_s}{2k}\left(\frac{n'_{i0}}{n_{i0}}\right)^2 - \frac{v_{i0}}{4\sqrt{2}k}\frac{n'_{i0}}{n_{i0}} - \frac{6v'^2_{i0}}{15kv_s} + \frac{m_e}{m_i}\frac{\eta_e k}{2\sqrt{2}}\frac{n'_{i0}}{n_{i0}}, \tag{18}$$

$$\omega_{Im} = -\frac{\nu_i}{2} - \frac{\eta_i k^2}{2} - \frac{m_e}{m_i}\frac{\eta_e k^2}{4} - \frac{3v'_{i0}}{4} - \frac{m_e}{m_i}\frac{\nu_e}{2} + \frac{\alpha}{2}. \tag{19}$$

Для $k_x r_{De} = 0{,}05$ $kr_{De} = \sqrt{26}\cdot 0{,}01$

$$\omega_{1Re} = kv_s + \frac{T_i}{T_e}\frac{kv_s}{2} - \frac{3\eta_i^2 k^3}{25v_s} - \frac{m_e}{m_i}\frac{3\eta_i\eta_e k^3}{25v_s} - \frac{3\eta_i k}{25}\left(\frac{n'_{i0}}{n_{i0}}\right) - \frac{m_e}{m_i}\frac{\eta_e k v'_{i0}}{4v_s}, \tag{20}$$

$$\omega_{Im} = -\frac{\nu_i}{2} - \frac{313\eta_i k^2}{676} - \frac{m_e}{m_i}\frac{\eta_e k^2}{4} - \frac{25v'_{i0}}{26} - \frac{v_s}{2}\left(\frac{n'_{i0}}{n_{i0}}\right) - \frac{m_e}{m_i}\frac{17\nu_e}{5}. \tag{21}$$

Ошибка в выражениях (16)–(21) не превышает 1–3% от точного решения дисперсионного уравнения. Вдали от переходного слоя ($x = (L-1000)r_{De}$) в формулах для реальной части частоты (16), (18), (20) главным является слагаемое, определяющее частоту длинноволновых ионно-звуковых колебаний в бесстолкновительной плазме с учетом малого вклада холодных ионов, вклад остальных членов в этой области не превышает 2–4%. Однако на границе переходного слоя ($x = (L-30)r_{De}$) вклад членов $\sim (n'_{i0}/n_{i0})^2$ в (16), (18) составляет $\sim 70\%$. В декремент затухания (17), (19), (21) как в глубине плазмы, так и на границе переходного слоя основной вклад вносят слагаемые, связанные с перезарядкой ионов, ионной вязкостью, электронной вязкостью за счет столкновений с нейтральными частицами и электронами, как и однородной плазме, и слагаемое, связанное с градиентом гидродинамической скорости ионов, обусловленного дрейфом ионного газа под действием самосогласованного электрического поля, вызванного разделением зарядов, причем вклад этого слагаемого при приближении к переходному слою возрастает с 2–10% до 23–72%. Слагаемые, связанные с ионизацией и столкновениями электронов с нейтралами, малы.

5. Из формул (16)–(21) видно, что в глубине плазмы частота ионно-звуковых колебаний слабо отличаются от $\omega_s = kv_s$, а затухание обусловлено эффектами, связанными с перезарядкой и вязкостью ионов и электронов. При приближении к переходному слою ($x \lesssim (L-30)r_{De}$) существенную роль в выражениях для реальной и мнимой частей решения системы (9)–(15) начинают играть члены, связанные с неоднородностью гидродинамической скорости и плотности ионного газа, обусловленные действием самосогласованного электрического поля. Однако в переходном слое гидродинамическое приближение для расчетов диссипативных членов неприменимо, так же, как и локальное приближение. В области, где сильно изменяются равновесные параметры плазмы, основную роль при распространении ионно-звуковой волны играет бесстолкновительное действие самосогласованного поля.

1. *Морозов И. Н., Настоящий А. Ф.* Условия вблизи границы плазма – стенка: кинетика ионов и распределение электрических потенциалов // Физика плазмы. – 1996. – **22**, № 7. – С. 659–667.
2. *Двинин С. А., Довженко В. А., Кузовников А. А.* К теории пристеночного слоя в плазме газового разряда // Там же. – 1999. – **25**, № 11. – С. 957–968.
3. *Schottky W.* Diffusionstheorie der positiven saule // Physikalische Zeitschrift. – 1924. – **25**. – P. 635–640.

4. *Langmuir I., Tonks L.* A general theory of the plasma of an arc // Phys. Rev. – 1929. – **34**. – P. 876–882.
5. *Каган Ю. М., Перель В. И.* Зондовые методы исследования плазмы // Успехи физ. наук. – 1963. – **81**, № 3. – С. 409–452.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
ННЦ "Харьковский физико-технический институт" НАН Украины

Поступило в редакцию 05.05.2010

Ya. F. Leleko, Corresponding Member of the NAS of Ukraine **K. N. Stepanov**

Ion-sound oscillations in strongly nonisothermic weakly ionized nonuniform hydrogen plasma

A stationary distribution of strongly nonisothermic weakly ionized hydrogen plasma parameters is obtained in the hydrodynamic approximation in a quasineutrality region in the transient layer between the plasma and a dielectric taking the ionization, charge exchange, diffusion, viscosity, and a self-consistent electric field into account. The ion velocity distribution function is determined with the help of the obtained self-consistent field potential distribution. The ion-sound oscillation frequency and the collisional damping decrement as functions of the wave vector in the plasma with the obtained parameters are found in the local approximation.