ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2010

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621(0375.8)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О законе полного тока при полигармонических электродвижущих силах на входе электроцепей

Виводяться формули у векторному обчислюванні закону повного струму у випадку полігармонічної електрорухомої сили на вході електроланки.

В известных роботах, например, [1–3] и других, закон полного тока математически отражает физический процесс в электроцепи при действии на ее входе вектора моноэлектродвижущей силы. Однако в практике вибрационных испытаний на надежность машин, приборов, их узлов и деталей с использованием электромагнитных (ЭМВС), электродинамических (ЭДВС) вибростендов часто применяется метод испытания изделий на действие полигармонических вибраций и ударов. Известно [3], что удар как импульс может быть представлен рядом Фурье, т. е. интерпретироваться в полигармоническом виде. А это значит, что на входе ЭМВС, ЭДВС в этом случае будет электродвижущая сила (ЭДС), описываемая выражением

$$\overline{E}_{\Sigma}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{E}_k(t) = \overline{\sum_{\alpha=1}^{n} E_{a\alpha} \sin(\omega_\alpha t \pm \varphi_\alpha)}, \tag{1}$$

где $E_{a\alpha}$ — амплитуда; ω_α — частота; φ_α — угол сдвига α-й гармоники U_α; n — число гармоник в $\overline{E}_{\Sigma}(t)$.

Каждая $\overline{E}_\alpha$ представляет собой вектор, вращающийся против часовой стрелки с частотой ω_α от начальной фазы φ_α, $\alpha = \overline{1, n}$.

Графически эти векторы можно изобразить так, как показано на рис. 1.

Проекции $\overline{E}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, n}$ на ось ординат при оси абсцисс, обозначающей время t, будут синусоиды $E_{a\alpha} \sin(\omega_\alpha t \pm \varphi_\alpha)$.

На основании (1) и рис. 1 суммарная ЭДС на входе электроцепи является вектором. Вследствие того, что все векторы $\overline{E}_\alpha$ приложены ко входу электроцепи в одной точке, для отдельной гармоники $\overline{E}_\alpha$ можно записать закон полного тока в виде [2, 3]

$$\int_C \overline{H}_\alpha dl = w \int_S \overline{\delta}_{I\alpha} dS, \tag{2}$$

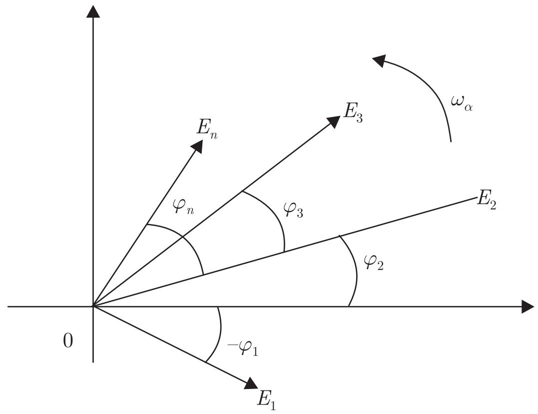

Рис. 1

где H_α — напряженность магнитного поля в ЭМВС, ЭДВС; l — средняя длина магнитной силовой линии в контуре C; S — площадь поперечного сечения провода электрической обмотки; $\delta_{I\alpha}$ — вектор плотности тока в точке; w — число витков обмотки.

Величина $\int\limits_S \overline{\delta}_{I\alpha} dS$ равна интенсивности тока $\overline{I}_\alpha$, проходящего по виткам w обмотки стенда. Так как $\overline{E}_\Sigma = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \overline{E}_\alpha$, то выражение (2) принимает вид

$$\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}} \int\limits_C \overline{H}_\alpha dl = \overline{\sum_{\alpha=n}^{n}} w \int\limits_S \overline{\delta}_{I\alpha} dS \tag{3}$$

или

$$\overline{\sum_{\alpha=1}^{n}} \int\limits_C \overline{H}_\alpha dl = \overline{\sum_{\alpha=1}^{n}} \overline{I}_\alpha w. \tag{4}$$

Величина $\overline{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}} \overline{H}_\alpha = \overline{H}_\Sigma$, являясь векторной суммой $\overline{H}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, n}$, представляет собой вектор $\overline{H}_\Sigma$. Величина $\overline{\sum\limits_{\alpha=1}^{n}} \overline{I}_\alpha w = w \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \overline{I}_\alpha = w\overline{I}_\Sigma$.

С учетом данного представления выражение (4) запишем в виде

$$\int\limits_C \overline{H}_\Sigma dl = w\overline{I}_\Sigma, \tag{5}$$

т. е. выражение (5) является интегральной формой закона полного тока [3].

Продолжим далее представление закона полного тока в различных формах векторного исчисления. Заметим, что в данном случае рассматриваем линейные электроцепи, для которых справедлив принцип суперпозиции. Примем во внимание формулу Стокса в виде [3] $\int\limits_S n \operatorname{rot} \overline{a} d\sigma = \int\limits_C \overline{a} dM$. Для нашего случая

$$\int\limits_C \overline{H}_\Sigma dl = \int\limits_S \operatorname{rot} \overline{H}_\Sigma dS. \tag{6}$$

Сравнивая (3) с (6), видим, что

$$\operatorname{rot}\overline{H}_\Sigma = \overline{\sum_{\alpha=1}^{n}}\overline{\delta}_{I\alpha} = \overline{\delta}_{I\Sigma}, \tag{7}$$

$\operatorname{rot}\overline{H}_\Sigma$ представляет собой векторную величину в проекциях на оси x, y, z, равную [3]

$$\operatorname{rot}\overline{H}_\Sigma = i\left(\frac{\partial H_{z\Sigma}}{\partial y} - \frac{\partial H_{y\Sigma}}{dz}\right) + j\left(\frac{\partial H_{x\Sigma}}{\partial z} - \frac{\partial H_{z\Sigma}}{dx}\right) + k\left(\frac{\partial H_{y\Sigma}}{\partial x} - \frac{\partial H_{x\Sigma}}{dy}\right), \tag{8}$$

где i, j, k — орты по соответствующим осям координат x, y, z; $H_{x\Sigma}$, $H_{y\Sigma}H_{z\Sigma}$ — проекции $\overline{H}_\Sigma$ на оси x, y, z, соответственно.

В свою очередь, каждый вектор

$$\overline{H}_\alpha = iH_{x\alpha} + jH_{y\alpha} + kH_{z\alpha}. \tag{9}$$

Используя (9) для представления $\overline{H}_\Sigma$ в проекциях на координаты x, y, z, получим

$$\overline{H}_\Sigma = iH_{x\Sigma} + jH_{y\Sigma} + kH_{z\Sigma} = \overline{\sum_{\alpha=1}^{n}}\overline{H}_\alpha = i\sum_{\alpha=1}^{n} H_{x\alpha} + j\sum_{\alpha=1}^{n} H_{y\alpha} + k\sum_{\alpha=1}^{n} H_{z\alpha}, \tag{10}$$

откуда видим, что

$$H_{x\Sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n} H_{x\alpha}; \qquad H_{y\Sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n} H_{y\alpha}; \qquad H_{z\Sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n} H_{z\alpha}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь вектор $\overline{\delta}_{I\Sigma}$ в системе координат x, y, z. В виде проекций на эти оси координат он равен

$$\overline{\delta}_{I\Sigma} = i\delta_{xI\Sigma} = j\delta_{yI\Sigma} + k\delta_{zI\Sigma}. \tag{12}$$

Теперь подставим (8), (10)–(12) в (7). В результате получим

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}_{I\Sigma} = i\delta_{xI\Sigma} = j\delta_{yI\Sigma} + k\delta_{zI\Sigma} = \operatorname{rot}\overline{H}_\Sigma = i\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H_{z\alpha}}{\partial y} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H_{y\alpha}}{\partial z}\right) + \\
+ j\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H_{x\alpha}}{\partial z} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H_{z\alpha}}{\partial x}\right) + k\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H_{y\alpha}}{\partial x} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial H_{x\alpha}}{\partial y}\right) = \\
= i\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial H_{z\alpha}}{\partial y} - \frac{\partial H_{y\alpha}}{\partial z}\right) + j\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial H_{x\alpha}}{\partial z} - \frac{\partial H_{z\alpha}}{\partial x}\right) + k\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial H_{y\alpha}}{\partial x} - \frac{\partial H_{y\alpha}}{\partial z}\right) = \\
= \sum_{\alpha=1}^{n}\left[i\left(\frac{\partial H_{z\alpha}}{\partial y} - \frac{\partial H_{y\alpha}}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial H_{x\alpha}}{\partial z} - \frac{\partial H_{z\alpha}}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial H_{y\alpha}}{\partial x} - \frac{\partial H_{y\alpha}}{\partial z}\right)\right] = \\
= \sum_{\alpha=1}^{n}\operatorname{rot}\overline{H}_\alpha.
\end{aligned} \tag{13}$$

В то же время

$$\delta_{xI\Sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial H_{z\alpha}}{\partial y} - \frac{\partial H_{y\alpha}}{\partial z}\right), \qquad \delta_{yI\Sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial H_{x\alpha}}{\partial z} - \frac{\partial H_{z\alpha}}{\partial x}\right),$$

$$\delta_{zI\Sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial H_{y\alpha}}{\partial x} - \frac{\partial H_{y\alpha}}{\partial z}\right).$$

Так как в электроцепи токи $\bar{I}_\alpha$ текут по проводу с одним для всех токов сечением S, то плотности токов $\overline{\sigma}_\alpha = \bar{I}_\alpha/S$. Заметим, что выражение (7) отражает закон полного тока в дифференциальной форме [2], но для многочастотной входной ЭДС.

Также следует отметить, что, согласно работе [4], в электроцепи с реактивными элементами при входной полигармонической ЭДС автоматически видоизменяется структура этой цепи. Каждой α-й гармонике ЭДС соответствует α-е реактивное сопротивление $\omega_\alpha L$, где L — индуктивность цепи. В этом случае каждая гармоника тока $i_\alpha(t)$ встречает полное α-е сопротивление вида $z_\alpha = \sqrt{R^2 + (\omega_\alpha L)^2}$ и тогда

$$i_\alpha(t) = \frac{E_\alpha \sin(\sigma_\alpha t + \varphi_\alpha - \Psi_\alpha)}{\sqrt{R^2 + (\omega_\alpha L)^2}},$$

где $\Psi_\alpha = \operatorname{arctg}(\omega_\alpha L/R)$, сдвиг $i_\alpha(t)$ от $E_\alpha(t)$.

Плотность тока

$$\bar{\delta}_\alpha(t) = \frac{\bar{i}_\alpha(t)}{S} = \frac{\overline{E}_\alpha(t)}{S\sqrt{R^2 + (\omega_\alpha L)^2}} = [iE_{\alpha x}(t) + jE_{\alpha y}(t) + kE_{\alpha z}(t)]\frac{1}{Sz_\alpha}.$$

Величина

$$\frac{E_{\alpha x}(t)}{Sz_\alpha} = \delta_{\alpha x}(t), \qquad \frac{E_{\alpha y}(t)}{Sz_\alpha} = \delta_{\alpha y}(t), \qquad \frac{E_{\alpha z}(t)}{Sz_\alpha} = \delta_{\alpha z}(t).$$

Таким образом, данное исследование показало возможные связи векторных сумм величин $\overline{H}_\Sigma$, $\overline{H}_\alpha$, $\bar{\delta}_\Sigma$, $\overline{\sigma}_\alpha$, $\alpha = \overline{1,n}$, и их проекций на координатные оси в случае, когда ЭДС на входе электроцепи является полигармоническим воздействием.

1. *Даревский А. И., Кухаркин Е. С.* Теоретические основы электротехники. Ч. II. Основы электромагнитного поля / Под ред. проф. П. А. Ионкина. – Москва: Высш. шк., 1965. – 284 с.
2. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – Москва: Высш. шк., 1978. – 232 с.
3. *Андре Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров. – Москва: Наука, 1965. – 780 с.
4. *Божко А. Е.* Сингуларисная теория сигналов и систем. – Харьков: Изд-во Харьков. политехн. ин-та, 2009. – 414 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 25.05.2009

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

On the complete current law for electric circuits with polyharmonic input voltage

The formulas in vector calculus for the complete current law for electric circuits with polyharmonic input voltage are deduced.