УДК 517.98

І. В. Орлов, Ф. С. Стонякін

Гранична форма властивості Радона–Нікодима вірна у довільному просторі Фреше

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Доведено справедливість граничної форми властивості Радона–Нікодима для довільного простору Фреше. Розглянуто деякі застосування.

Як відомо, найбільш ефективний нескінченновимірний аналог інтеграла Лебега — інтеграл Бохнера — не зберігає, взагалі кажучи, одну з принципових властивостей інтеграла Лебега: тобто, кожний невизначений інтеграл Бохнера є абсолютно неперервним, але не кожне абсолютно неперервне відображення є невизначеним інтегралом Бохнера [1]. Відомим підходом до цієї проблеми є відокремлення, дослідження та використання в конкретних задачах класу просторів, для яких ця різниця відсутня. Нагадаємо основні визначення.

Визначення 1. Відображення $f\colon I = [a;b] \to E$, де E — банахів простір, є інтегровним за Бохнером, якщо для довільної послідовності простих відображень $f_n \to f$ збігається відповідна послідовність інтегралів f_n, що природно визначаються. У випадку, коли E — повний локально опуклий простір (ЛОП), інтегровність f за Бохнером розуміється як інтегровність в усіх банахових просторах, що утворюються факторизацією за ядрами неперервних напівнорм та наступним поповненням за фактор-нормами.

Визначення 2. Говорять, що ЛОП E має *властивість Радона–Нікодима* (RNP), якщо довільне абсолютно неперервне відображення $F\colon I = [a;b] \to E$ є невизначеним інтегралом Бохнера, тобто має вигляд $F(x) = C + (B)\int\limits_a^x f(t)\,dt$.

Властивість RNP мають, наприклад, усі рефлексивні банахові простори. Різноманітні дослідження вказаного класу просторів активно продовжуються [2–4]. Однак відзначимо, що властивість RNP не мають, наприклад, добре відомі простори c_0, $L_1[a;b]$ та $C[a;b]$. Це означає, что клас просторів з RNP є недостатньо широким для багатьох конкретних задач аналізу і виникає проблема опису абсолютно неперервних відображень, які можна зобразити у вигляді невизначених інтегралів Бохнера.

У наших роботах [5, 6] у зв'язку з даною проблемою був введений, зокрема, клас *компактно абсолютно неперервних відображень* відрізка в ЛОП $AC_K(I,E)$, який містить абсолютно неперервні відображення з відрізка I у банахові простори E_C, що породжені усіма абсолютно опуклими компактами $C \in \mathcal{C}(E)$, тобто мають вигляд $(\operatorname{span} C, p_C)$, де p_C є функціоналом Мінковського множини C. Основний результат роботи [6, теорема 3.2] стверджує, що довільне відображення $F \in AC_K(I,E)$ є невизначеним інтегралом Бохнера. У [6] висловлено гіпотезу про те, що в довільному просторі Фреше E класи компактно абсолютно неперервних відображень $AC_K(I,E)$ та невизначених інтегралів Бохнера $W_1^1(I,E)$ збігаються (тобто, E має *K-властивість Радона–Нікодима* $(RNP)_K$).

У даній роботі показано справедливість цієї гіпотези: *довільний простір Фреше має властивість* $(RNP)_K$ (теорема 1). На цій базі встановлено основний результат роботи — *гранична форма властивості RNP* (теорема 3): для довільного простору Фреше E простір невизначених інтегралів Бохнера $W_1^1(I,E)$ можливо двома способами зобразити як топологічну індуктивну границю:

$$W_1^1(I,E) \overset{top}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(I,E_C) \overset{top}{=} \varinjlim_{C'\in\mathcal{C}(E)} AC(I,E_{C'}). \qquad (1)$$

Аналогічне зображення є вірним також і для простору $L_1(I,E)$ (теорема 4).

Отриманий результат у певному сенсі розв'язує проблему Радона–Нікодима для просторів Фреше.

Перейдемо до більш детального викладення. Далі позначимо через $L_1(I,E)$ простір відображень $f\colon I\to E$, що інтегровні за Бохнером на I.

1. K-властивість Радона–Нікодима у просторах Фреше. Згідно з [6, теорема 3.2] $AC_K(I,E)\subset W_1^1(I,E)$ для довільного ЛОП E; при цьому включення може бути строгим [6, приклад 3.1]. Однак якщо E — простір Фреше, то вказані класи збігаються.

Теорема 1. *Нехай E — простір Фреше. Тоді для довільного $f\in L_1(I,E)$ існує такий компакт $C\in\mathcal{C}(E)$, що відображення $F(x)=F(a)+(B)\int\limits_a^x f(t)\,dt$ належить до класу $AC(I,E_C)$. Таким чином, $AC_K(I,E)=W_1^1(I,E)$, тобто довільний простір Фреше E має властивість $(RNP)_K$.*

Схема доведення. 1. Якщо E — банахів простір, то f є майже скрізь сепарабельнозначним, тобто можна вважати E сепарабельним. Отже, з точністю до ізометрії $E\subset$ $\subset C[0;1]$ [7, V.7.12].

2. Введемо поняття *еліпсоїда* C_ε, $\varepsilon=(\varepsilon_k>0)_1^\infty$, в E відносно фіксованої послідовності $\delta=(\delta_k>0)_1^\infty$:

$$C_\varepsilon=\left\{\varphi\in E\;\middle|\;\max\left(|\varphi(0)|,\sup_k\frac{\omega_\varphi(\delta_k)}{\varepsilon_k}\right)\leqslant 1\right\},$$

де ω_φ — модуль неперервності функції φ. За допомогою теореми Арцела–Асколі неважко показати, що $C_\varepsilon\in\mathcal{C}(E)$ при $\varepsilon_k\to 0$.

3. Безпосередньо перевіряється вимірність функції $\|f(\cdot)\|_{C_\varepsilon}$ для довільного C_ε. Покладемо при $k=1,2,\ldots$ $\varepsilon^k=(0,0,\ldots,0,\overbrace{1}^{k},1,1,\ldots)$, $J^k(f)=\int\limits_I\|f(t)\|_{C_{\varepsilon^k}}dt$.

При цьому виявляється, що $\lim\limits_{k\to\infty}J^k(f)=0$. Це дає можливість підібрати послідовність вигляду

$$\varepsilon=\left(1,\ldots,1;\overbrace{\frac{1}{2}}^{k_1},\ldots,\frac{1}{2};\overbrace{\frac{1}{3}}^{k_2},\ldots,\frac{1}{3};\ldots;\overbrace{\frac{1}{n+1}}^{k_n},\ldots\frac{1}{n+1};\ldots\right),$$

для якої $\int\limits_I\|f(t)\|_{C_\varepsilon}dt<\infty$, $C_\varepsilon\in\mathcal{C}(E)$, звідки $F\in AC(I,E_C)$.

4. У загальному випадку результат випливає зі щільного вкладення E у добуток послідовності банахових просторів та відомої теореми Тихонова [8].

2. Шкала просторів, що породжені компактами у просторі Фреше. Для доведення граничної форми (1) властивості RNP необхідно також дослідити властивості індуктивної шкали $\{E_C\}$ банахових просторів, що породжені усіма компактами $C\in\mathcal{C}(E)$. Ці властивості ми з'єднаємо у такому твердженні (у гільбертовому випадку вони досліджені в [9]).

Теорема 2. *Нехай E — простір Фреше, $\mathcal{C}(E)$ — система всіх абсолютно опуклих компактів у E, що індуктивно впорядкована відношенням*

$$(C_1 \preccurlyeq C_2) \Leftrightarrow (C_1 \subset M \cdot C_2, M > 0).$$

Тоді:

(i) система $\overrightarrow{E}_{\mathcal{C}} = \{E_C\}_{C\in\mathcal{C}(E)}$ — індуктивна шкала ЛОП відносно неперервних вкладень;

(ii) індуктивна границя шкали $\overrightarrow{E}_{\mathcal{C}}$ збігається з початковим простором:

$$E \overset{top}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} E_C;$$

(iii) шкала $\overrightarrow{E}$ має властивість σ-компактної апроксимації: для довільної послідовності $\{C_n\}_1^\infty \subset \mathcal{C}(E)$ знайдеться такий компакт $C_\infty \in \mathcal{C}(E)$, що для усіх $n \in \mathbb{N}$ справедливі компактні вкладення $E_{C_n} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{C_\infty}$.

3. Гранична форма властивості Радона–Нікодима. Відзначимо, що з теорем 1 та 2 випливає векторний ізоморфізм

$$W_1^1(I,E) \overset{vect}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(I,E_C)$$

у випадку простору Фреше E. Насправді, цей ізоморфізм є топологічним. Більше того, $W_1^1(I,E)$ припускає аналогічне зображення у вигляді індуктивної границі просторів абсолютно неперервних відображень.

У просторах Фреше невизначених інтегралів Бохнера $W_1^1(I,E)$ над просторами Фреше ми введемо визначальну систему напівнорм

$$\left\{\|F\|^j = \|F(a)\|_j + \int\limits_a^b \|F'(t)\|_j dt\right\}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

У просторах $W_1^1(I,E_C)$ та більш широких просторах абсолютно неперервних відображень $AC(I,E_C)$, $C \in \mathcal{C}(E)$, введемо банахові норми

$$\|F\|^C = \|F(a)\|_C + \int\limits_a^b \|F'(t)\|_C dt.$$

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 3. *У довільному просторі Фреше E справедлива гранична форма властивості RNP* (1)*:*

$$W_1^1(I,E) \overset{top}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(I,E_C) \overset{top}{=} \varinjlim_{C'\in\mathcal{C}(E)} AC(I,E_{C'}).$$

Схема доведення. 1. З теореми 2 виходить

$$(E_C \hookrightarrow\hookrightarrow E_{C'}) \Rightarrow (AC(I, E_C) \hookrightarrow W_1^1(I, E_{C'}) \hookrightarrow AC(I, E_{C'})).$$

Звідси випливає збіг двох індуктивних границь у (1).

2. Залишається перевірити першу рівність в (1); при цьому вкладення індуктивної границі в простір $Y = W_1^1(I, E)$ є очевидним. Неперервність зворотного вкладення достатньо перевірити на інтегралах від простих функцій. Якщо $F_n \xrightarrow{Y} 0$, $F_n' = f_n$ — прості, то покладаючи, у випадку банахова E,

$$C_n = \{x \in \operatorname{span} f_n(I) \mid \|x\| \leqslant 1\}, \qquad C = \overline{co}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sqrt{\|F_n\|_{C_n}} \cdot C_n\right),$$

можна перевірити, що $C \in \mathcal{C}(E)$ и $\|F_n\|_C \to 0$.

3. Перехід до випадку простору Фреше E повторює схему, що викладена в п. 4 доведення теореми 1.

Ізоморфізм (1) можна переформулювати для простору інтегровних за Бохнером відображень $L_1(I, E)$, якщо покласти

$$\overset{o}{AC}(I, E_{C'}) = \{F \in AC(I, E_{C'}) \mid F(a) = 0\}.$$

Теорема 4. *У довільному просторі Фреше E справедлива гранична форма властивості RNP у вигляді*

$$L_1(I, E) \overset{top}{=} \varinjlim_{C \in \mathcal{C}(E)} L_1(I, E_C) \overset{top}{=} \varinjlim_{C' \in \mathcal{C}(E)} \overset{o}{AC}(I, E_{C'}). \tag{2}$$

Відзначимо корисне застосування ізоморфізмів (1), (2), яке випливає з відомого критерію неперервності лінійних операторів, що визначені на індуктивній границі [8, II.6.1].

Наслідок 1. *Нехай E — простір Фреше, X — довільний ЛОП, $A\colon W_1^1(I, E) \to X$ — лінійний оператор. Тоді рівносильними є такі умови:*

(i) A неперервний на $W_1^1(I, E)$;

(ii) A неперервний на кожному $W_1^1(I, E_C)$, $C \in \mathcal{C}(E)$;

(iii) A неперервний на кожному $AC(I, E_{C'})$, $C' \in \mathcal{C}(E)$.

Аналогічне твердження справедливе і для операторів $A\colon L_1(I, E) \to X$.

Друге застосування теореми 3 є істотно нелінійним і узагальнює теорему про середнє [10].

Наслідок 2. *Нехай E — простір Фреше, відображення $F\colon [a; b] \to E$ неперервне на $[a; b]$ та диференційовне на $[a; b] \setminus e$, де $\operatorname{mes}(e) = 0$, $\operatorname*{mes}_w F(e) = 0$, а множина $F'([a; b] \setminus e)$ обмежена. Тоді існує такий абсолютно опуклий компакт $C \subset E$, що*

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \in \overline{co}_{E_C} F'([a; b] \setminus e). \tag{3}$$

Відзначимо, що оцінка в (3) на відміну від оцінки в [10] та інших оцінок класичного типу, може бути незамкненою в E.

Результати наслідків 1, 2 вказують на можливість "обходити" відсутність глобальної властивості RNP у просторі шляхом переходу до підпросторів, що породжені компактами.

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
2. *Cheeger J., Kleiner B.* Characterization of the Radon-Nikodym property in terms of inverse limits // arXiv: 0706.3389v3 [math. FA], 11 Jan 2008. – 12 p.
3. *Bu Q., Buskes G., Lai Wei-Kai.* The Radon–Nikodym property for tensor products of Banach lattices II // Positivity. – 2008. – **12**. – P. 45–54.
4. *Arvanitakis A. D., Aviles A.* Some examples of continuous images of Radon–Nikodym compact spaces // arXiv:0903.0653v1 [math.GN], 3 Mar 2009. – 11 p.
5. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Compact variation, compact subdifferential and indefinite Bochner integral // Meth. Funct. Anal. and Topol. – 2009. – **15**, No 1. – P. 74–90.
6. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Strong compact properties of the mappings and K-property of Radon–Nikodym // Ibid. – 2010. – **16**, No 2. – P. 183–196.
7. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
8. *Shaefer H. H.* Topological vector spaces. – New York; London: McMillan, 1966. – 359 p.
9. *Орлов И. В.* Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2008. – **29**. – С. 165–175.
10. *Орлов И. В.* Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2001. – **8**, № 4. – С. 419–439.

Таврійський національний університет
ім. В. І. Вернадського, Сімферополь

Надійшло до редакції 12.03.2010

I. V. Orlov, F. S. Stonyakin

Limiting form of the Radon–Nikodym property is true for arbitrary Fréchet space

The validity of the limiting form of the Radon–Nikodym property for an arbitrary Fréchet space is proved. Some applications are considered.