УДК 512

Т. Р. Сейфуллин

Безутиан и операция расширения ограниченных корневых функционалов для системы полиномов

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Летичевским)

Кореневий функціонал (елемент інверсної системи Маколея) є лінійним функціоналом, що визначений на кільці поліномів та анулює ідеал поліномів. Обмежений кореневий функціонал є функціонал, що анулює d-ту компоненту ідеалу в деякому його напівградуюванні. Розглядається взаємозв'язок між безутіаном для поліномів від декількох змінних та операцією розширення обмежених кореневих функціоналів.

В работе будут использоваться определения, обозначения и соглашения работ [1–5]. Будем писать $\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$ вместо $\mathbf{R}[x^{\leqslant d}]$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *— переменные,* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$*,* $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n} \deg(f_i) - n$*;* $h(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$*,* $g(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant D}$*. Тогда:*

1. *Если* $L(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ *и аннулирует* $(f(x), h(x))_x^{\leqslant \delta_f + \delta}$*,где* $\delta \geqslant 0$*, то*

$$L(x_*)*(h(x)\cdot g(x)) - (L(x_*)*h(x))\cdot g(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d+D-\delta-1}.$$

2. *Если* $L(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ *и аннулирует* $(f(x), h(x), g(x))_x^{\leqslant \delta_f + \delta}$*, где* $\delta \geqslant 0$*, то*

$$(L(x_*)*h(x))\cdot g(x) - (L(x_*)*g(x))\cdot h(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d+D-\delta-1}.$$

Доказательство 1. Положим $S(x) = L(x_*)*(h(x)\cdot g(x)) - (L(x_*)*h(x))\cdot g(x)$. Так как имеет место $h(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, $g(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant D}$ и функционал $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f + \delta}$, то из доказательства теоремы 1 из [4] видно, что

$$S(x) = L(y_*).h(y)\cdot \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) & \nabla g(x,y) \\ f(x) & 0 \end{Vmatrix} + S'(x),$$

где $S'(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d+D-\delta-1}$, $y \simeq x$. Первое слагаемое $\in L(y_*).(f(x)\cdot h(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f + d + D}$. Так как $L(y_*)$ аннулирует $(h(y))_y^{\leqslant \delta_f + \delta}$, то в силу *3* леммы 3 из [5] имеет место

$$L(y_*).(f(x)\cdot h(y))_{x,y}^{\leqslant \delta_f + d + D} \subseteq (f(x))_x^{\leqslant (\delta_f + d + D) - (\delta_f + \delta) - 1} = (f(x))_x^{\leqslant d+D-\delta-1},$$

следовательно, первое слагаемое принадлежит $(f(x))_x^{\leqslant d+D-\delta-1}$. Поскольку оба этих слагаемых принадлежат $(f(x))_x^{\leqslant d+D-\delta-1}$, то и их сумма $S(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d+D-\delta-1}$.

Доказательство 2. Так как $L(x_*)$ аннулирует $(f(x), h(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta}$, $h(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, $g(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant D}$, то в силу *1* теоремы имеет место

$$L(x_*)*(h(x)\cdot g(x)) - (L(x_*)*h(x))\cdot g(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d+D-\delta-1}.$$

Так как $L(x_*)$ аннулирует $(f(x), g(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta}$, $g(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant D}$, $h(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, то в силу *1* теоремы имеет место

$$L(x_*)*(g(x)\cdot h(x)) - (L(x_*)*g(x))\cdot h(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d+D-\delta-1}.$$

Тогда имеет место

$$(L(x_*)*h(x))\cdot g(x) - (L(x_*)*g(x))\cdot h(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d+D-\delta-1}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — переменные, $y \simeq x$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n} \deg(f_i) - n$; $h(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, $\delta_{f,h} = \sum\limits_{i=1}^{n} \deg(f_i) + d - n$. Положим*

$$B(x,y) = \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) & \nabla h(x,y) \\ f(x) & h(x) \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) & \nabla h(x,y) \\ f(y) & h(y) \end{Vmatrix},$$

где $\nabla h(x,y) = \nabla_x(x,y).h(x)$. Тогда $B(x,y)$ является безутианом полиномов $(f(x), h(x))$ и имеет место $\delta_{f,h} = \delta_f + d$.

Пусть $L(x_*)$ — функционал из $\mathbf{R}[x]_*$, аннулирующий $(f(x), h(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta}$, где $\delta \geqslant 0$. Тогда $L(x_*)*h(x) = L(y_*).B(x,y)$. Кроме того:

1. $L(x_*)*h(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d-\delta-1}$.

2. $L(x_*)*h(x) \in (f(x), h(x))_x^{\leqslant \delta_f+d}$.

3. $L(x_*)*h(x)$ определяется однозначно, с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant d-\delta-1}$, независимо от выбора $\nabla f(x,y)$ и выбора $\nabla_x(x,y)$.

4. $L(x_*)*h(x)$ определяется однозначно, с точностью до слагаемого из $(f(x))_x^{\leqslant d-\delta-1}$, независимо от действия $L(x_*)$ вне $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f+\delta}$.

Доказательство. Эта теорема есть следствие теоремы 2 из [5], если вместо $f(x)$ подставить $(f(x), h(x))$, вместо δ_f подставить $\delta_{f,h} = \delta_f + d$, вместо $\triangle$ подставить $\delta_f + \delta$ и учесть, что $L(x_*)*h(x) = L(y_*).B(x,y)$. Тогда в *1*, *3*, *4* теорем $\delta_f - \triangle - 1$ перейдет в $(\delta_f + d) - (\delta_f + \delta) - 1 = d - \delta - 1$, в *2* теорем δ_f перейдет в $\delta_f + d$, в *4* теорем $\triangle$ перейдет в $\delta_f + \delta$. Кроме того, имеет место $(f(x), h(x))_x^{\leqslant d-\delta-1} = (f(x))_x^{\leqslant d-\delta-1}$, так как $d - \delta - 1 < d = \deg(h)$.

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n} \deg(f_i) - n$.*

Пусть $L_p(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ и аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta_p}$, где $\delta_p \geqslant 0$, здесь $p = 1, 2$.

Пусть $L(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ и $L(x_*) \equiv L_1(x_*)*L_2(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$. Тогда:

1. $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$.

2. Если $L_1(x_*)$ аннулирует $(h_1(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta_1}$, где $h_1(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1}$, то

$$L(x_*)\cdot h_1(x) \equiv L_2(x)\cdot(L_1(x_*)*h_1(x)) \quad \text{на} \quad \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_1}.$$

3. Если $L_2(x_*)$ *аннулирует* $(h_2(x))_x^{\leqslant\delta_f+\delta_2}$, *где* $h_2(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}$, *то*

$$L(x_*)\cdot h_2(x)\equiv L_1(x)\cdot(L_2(x_*)*h_2(x)) \quad \textit{на} \quad \mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_2}.$$

Доказательство 1. В силу *2* теоремы 3 из [1] $L_1(x_*)*L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$. Так как $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}\subseteq\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$ и $L(x_*)\equiv L_1(x_*)*L_2(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$, то $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$.

Доказательство 3. Положим $D=\delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_2$, пусть $g^2(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant D}$. Тогда

$$L(x_*)\cdot h_2(x).g^2(x)=L(x_*).h_2(x)\cdot g^2(x)=(L_1(x_*)*L_2(x_*)).h_2(x)\cdot g^2(x),$$

так как $L(x_*)\equiv L_1(x_*)*L_2(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$,

$$h_2(x)\cdot g^2(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}\cdot\mathbf{R}[x]^{\leqslant D}=\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2+D}=\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}.$$

Положим $S(x)=L_2(x_*)*(h_2(x)\cdot g^2(x))-(L_2(x_*)*h_2(x))\cdot g^2(x)$. Тогда в силу *1* теоремы 1 $S(x)\in(f(x))_x^{\leqslant d_2+D-\delta_2-1}$, поскольку $h_2(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}$, $g^2(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant D}$, $L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x),h_2(x))_x^{\leqslant\delta_f+\delta_2}$. Так как $D=\delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_2$, то $d_2+D-\delta_2-1=\delta_f+\delta_1$, следовательно, $S(x)\in(f(x))_x^{\leqslant\delta_f+\delta_1}$. Поскольку $L_1(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f+\delta_1}$, то $L_1(x_*).S(x)=0$. Тогда

$$\begin{aligned}(L_1(x_*)*L_2(x_*)).h_2(x)\cdot g^2(x)&=L_1(x_*).L_2(x_*)*(h_2(x)\cdot g^2(x))=\\&=L_1(x_*).((L_2(x_*)*h_2(x))\cdot g^2(x)+S(x))=\\&=L_1(x_*).(L_2(x_*)*h_2(x))\cdot g^2(x)+L_1(x_*).S(x)=\\&=L_1(x_*)\cdot(L_2(x_*)*h_2(x)).g^2(x)+0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$L(x_*)\cdot h_2(x).g^2(x)=L_1(x_*)\cdot(L_2(x_*)*h_2(x)).g^2(x).$$

Тогда в силу произвольности $g^2(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant D}=\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_2}$ имеет место

$$L(x_*)\cdot h_2(x)\equiv L_1(x_*)\cdot(L_2(x_*)*h_2(x)) \quad \text{на} \quad \mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_2}.$$

Доказательство 2. В силу теоремы 4 из [1] имеет место $L_1(x_*)*L_2(x_*)\equiv L_2(x_*)*L_1(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$. Поскольку $L(x_*)\equiv L_1(x_*)*L_2(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$, то имеет место $L(x_*)\equiv L_2(x_*)*L_1(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$. Тогда из *3* теоремы следует *2* теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{R}$ *— коммутативное кольцо с единицей,* $x=(x_1,\dots,x_n)$ *— переменные,* $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$ *— полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f=\sum\limits_{i=1}^{n}\deg(f_i)-n$.

Пусть $h_p(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_p}$, $L_p(x_*)\in\mathbf{R}[x]_*$ *и аннулирует* $(f(x),h_p(x))_x^{\leqslant\delta_f+\delta_p}$, *где* $\delta_p\geqslant 0$, *здесь* $p=1,2$.

Пусть $L(x_*)\in\mathbf{R}[x]_*$ *и* $L(x_*)\equiv L_1(x_*)*L_2(x_*)$ *на* $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$, *пусть* $h(x)=$ $=h_1(x)\cdot h_2(x)$. *Тогда:*

1. $L(x_*)$ *аннулирует* $(f(x),h(x))_x^{\leqslant\delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$.

2. $L(x_*)*h(x)-(L_1(x)*h_1(x))\cdot(L_2(x)*h_2(x))\in(f(x))_x^{\leqslant(d_1+d_2)-(\delta_1+\delta_2+1)-1}$.

Доказательство. $h(x) = h_1(x){\cdot}h_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1}{\cdot}\mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2} = \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1+d_2}$. Так как $L_2(x_*)$ аннулирует $(f(x), h_2(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta_2}$ и $h_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2}$, то в силу *1* теоремы 2 $L_2(x_*){*}h_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2-\delta_2-1}$.

Доказательство 1. Так как функционал $L_p(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta_p}$ для $p = 1,2$ и $L(x_*) \equiv L_1(x_*){*}L_2(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$, то в силу *1* теоремы 3 функционал $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$. Так как $L_2(x_*)$ аннулирует $(h_2(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta_2}$, то в силу *3* теоремы 3 $L(x_*){\cdot}h_2(x) \equiv L_1(x_*){\cdot}(L_2(x_*){*}h_2(x))$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_2}$. Так как $h_1(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1}$, то в силу *2* леммы 2 из [5] $L(x_*){\cdot}h_2(x){\cdot}h_1(x) \equiv L_1(x_*){\cdot}(L_2(x_*){*}h_2(x)){\cdot}h_1(x)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant (\delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_2)-d_1} = \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_1-d_2}$. Так как $L_1(x_*)$ аннулирует $(h_1(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta_1}$ и $L_2(x_*){*}h_2(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_2-\delta_2-1}$, то в силу *1* леммы 2 из [5] $L_1(x_*){\cdot}(L_2(x_*){*}h_2(x))$ аннулирует $(h_1(x))_x^{\leqslant (\delta_f+\delta_1)-(d_2-\delta_2-1)} = (h_1(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_2}$. Тогда в силу *2* леммы 1 из [3] $L_1(x_*){\cdot}(L_2(x_*){*}h_2(x)){\cdot}h_1(x) \equiv 0(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant (\delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_2)-d_1} = \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_1-d_2}$, так как $h_1(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1}$. Следовательно, $L(x_*){\cdot}h(x) = L(x_*){\cdot}h_2(x){\cdot}h_1(x) \equiv 0(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1-d_1-d_2}$. И так как $h(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d_1+d_2}$, то в силу *2* леммы 1 из [3] $L(x_*)$ аннулирует $(h(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$. Таким образом, $L(x_*)$ аннулирует $(f(x), h(x))_x^{\leqslant \delta_f+\delta_1+\delta_2+1}$.

Доказательство 2. Доказательство утверждения будет дано в последующих работах.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{R}$ — *коммутативное кольцо с единицей,* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — *переменные,* $y \simeq x$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x))$ — *полиномы из* $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \deg(f_i) - n$. *Положим*

$$B(x,y) = \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) \\ f(x) \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} \nabla f(x,y) \\ f(y) \end{Vmatrix}.$$

Пусть $E(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ *и аннулирует* $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f-1}$, $E(y_*).B(x,y) = 1$. *Тогда:*

1. Если $L(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ *и аннулирует* $(f(x))_x^{\leqslant \triangle}$, *то* $L(y_*).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f-\triangle-1}$ *и*

$$L(x_*) \equiv E(x_*){\cdot}(L(y_*).B(x,y)) \quad \text{на} \quad \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle},$$

если к тому же $L(y_*).B(x,y) \in (f(x))_x^{\leqslant \delta_f-\triangle-1}$, *то*

$$L(x_*) \equiv 0(x_*) \quad \text{на} \quad \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle}.$$

2. Если $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, *то* $E(x_*){\cdot}F(x)$ *аннулирует* $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f-d-1}$ *и*

$$F(x) - (E(y_*){\cdot}F(y)).B(x,y) \in (f(x))_x^{\leqslant d},$$

если к тому же $E(x_*){\cdot}F(x) \equiv 0$ *на* $\mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f-d-1}$, *то*

$$F(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d}.$$

Доказательство 1. Так как $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \triangle}$, то в силу *1* теоремы 2 из [5] имеет место $L(y_*).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \delta_f-\triangle-1}$. Так как $L(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \triangle}$, $E(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant \delta_f-1}$, то в силу *4* теоремы 4 из [5]

$$L(x_*){\cdot}(E(y_*).B(x,y)) \equiv E(x_*){\cdot}(L(y_*).B(x,y)) \quad \text{на} \quad \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle+(\delta_f-1)-(\delta_f-1)} = \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle}.$$

Так как $E(y_*).B(x,y)=1$, то $L(x_*)\cdot(E(y_*).B(x,y))=L(x_*)\cdot 1=L(x_*)$, следовательно,

$$L(x_*)\equiv E(x_*)\cdot(L(y_*).B(x,y)) \quad \text{на} \quad \mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle}.$$

Если $L(y_*).B(x,y)\in(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\triangle-1}$, то в силу *3* леммы 2 из [5] $E(x_*)\cdot(L(y_*).B(x,y))$ аннулирует $\mathbf{R}[x]^{\leqslant(\delta_f-1)-(\delta_f-\triangle-1)}=\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle}$, так как $E(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-1}$. Следовательно, $E(x_*)\cdot(L(y_*).B(x,y))\equiv 0(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle}$. Тогда $L(x_*)\equiv 0(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle}$.

Доказательство 2. Так как $F(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, $E(x_*)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-1}$, то в силу *1* леммы 2 из [5] $E(x_*)\cdot F(x)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant(\delta_f-1)-d}=(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-d-1}$, и в силу *5* теоремы 3 из [5]

$$(E(y_*).B(x,y))\cdot F(x)-(E(y_*)\cdot F(y)).B(x,y)\in(f(x))_x^{\leqslant\delta_f+d-(\delta_f-1)-1}=(f(x))_x^{\leqslant d}.$$

Так как $E(y_*).B(x,y)=1$, то $(E(y_*).B(x,y))\cdot F(x)=1\cdot F(x)=F(x)$, следовательно,

$$F(x)-(E(y_*)\cdot F(y)).B(x,y)\in(f(x))_x^{\leqslant d}.$$

Если $E(x_*)\cdot F(x)\equiv 0(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-d-1}$, то в силу *4* теоремы 2 из [5]

$$(E(y_*)\cdot F(y)).B(x,y)-0(y_*).B(x,y)\in(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-(\delta_f-d-1)-1}=(f(x))_x^{\leqslant d},$$

поскольку $E(x_*)\cdot F(x)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-d-1}$. И так как $0(y_*).B(x,y)=0(x)$, то имеет место $F(x)\in(f(x))_x^{\leqslant d}$.

Следствие 1. *Пусть имеют место условия теоремы 5. Тогда:*

1. Если $L(x_*)\in\mathbf{R}[x]_*$ и аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\triangle}$, и $\triangle\geqslant\delta_f$, то $L(x_*)\equiv 0(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle}$.

2. Если $F(x)\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$ и $d\geqslant\delta_f$, то $F(x)\in(f(x))_x^{\leqslant d}$.

Доказательство. Пусть $D<0$, тогда $\mathbf{R}[x]^{\leqslant D}=\{0\}$, и $(f(x))_x^{\leqslant D}=\{0\}$. Следовательно, если $D<0$, то $\mathbf{R}[x]^{\leqslant D}=(f(x))_x^{\leqslant D}$.

Доказательство 1. Так как $\triangle\geqslant\delta_f$, то $\delta_f-\triangle-1<0$. В силу *1* теоремы 5 $L(y_*).B(x,y)\in$ $\in\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-\triangle-1}=(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\triangle-1}$. Последнее равенство имеет место, так как $\delta_f-\triangle-1<0$. Следовательно, $L(y_*).B(x,y)\in(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\triangle-1}$. Тогда в силу *1* теоремы 5 $L(x_*)\equiv 0(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle}$.

Доказательство 2. Так как $d\geqslant\delta_f$, то $\delta_f-d-1<0$. В силу *2* теоремы 5 $E(x_*)\cdot F(x)$ аннулирует $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-d-1}=\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-d-1}$. Последнее равенство имеет место, так как $\delta_f-d-1<0$. Следовательно, $E(x_*)\cdot F(x)\equiv 0(x_*)$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-d-1}$. Тогда в силу *2* теоремы 5 имеет место $F(x)\in(f(x))_x^{\leqslant d}$.

Следствие 2. *Пусть имеют место условия теоремы 5. Тогда:*

1. Отображение $\mathbf{R}[x]_*\ni L(x_*)\mapsto L(y_*).B(x,y)\in\mathbf{R}[x]$ индуцирует отображение

$$\frac{((f(x))_x^{\leqslant\triangle})^\perp}{(\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle})^\perp}\to\frac{\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-\triangle-1}}{(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\triangle-1}}.$$

2. Отображение $\mathbf{R}[x]\ni F(x)\mapsto E(x_*)\cdot F(x)\in\mathbf{R}[x]_*$ индуцирует отображение

$$\frac{\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}}{(f(x))_x^{\leqslant d}}\to\frac{((f(x))_x^{\leqslant\delta_f-d-1})^\perp}{(\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-d-1})^\perp}.$$

3. Если $d + \triangle = \delta_f - 1$, то индуцированные отображения в 1 и 2 взаимно обратны.

Доказательство 1. В силу *1* теоремы 2 из [5] образ $((f(x))^{\leqslant\triangle})^{\perp}$ при отображении лежит в $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-\triangle-1}$, в силу *4* той же теоремы образ $(\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle})^{\perp}$ при отображении лежит в $(f(x))_x^{\leqslant\delta_f-\triangle-1}$. Следовательно, имеет место доказываемое утверждение.

Доказательство 2. Так как $E(x_*) \in ((f(x))_x^{\leqslant\delta_f-1})^{\perp}$, то в силу *1* леммы 2 из [5] образ $\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$ при отображении лежит в $((f(x))^{\leqslant\delta_f-d-1})^{\perp}$, в силу *3* той же леммы образ $(f(x))_x^{\leqslant d}$ при отображении лежит в $(\mathbf{R}[x]^{\leqslant\delta_f-d-1})^{\perp}$. Следовательно, имеет место доказываемое утверждение.

Доказательство 3. Композиция индуцированных отображений в *1* и *2* есть отображение

$$\frac{((f(x))_x^{\leqslant\triangle})^{\perp}}{(\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle})^{\perp}} \to \frac{((f(x))_x^{\leqslant\triangle})^{\perp}}{(\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle})^{\perp}},$$

индуцированное отображением $\mathbf{R}[x]_* \ni L(x_*) \mapsto E(x_*)\cdot(L(y_*).B(x,y)) \in \mathbf{R}[x]_*$. Это отображение является тождественным, так как в силу *1* теоремы 5 для любого $L(x_*) \in ((f(x))^{\leqslant\triangle})^{\perp}$ имеет место $L(x_*) \equiv E(x_*)\cdot(L(y_*).B(x,y))$ на $\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle}$, т. е. $L(x_*) - E(x_*)\cdot(L(y_*).B(x,y)) \in$ $\in (\mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle})^{\perp}$. Композиция индуцированных отображений в *2* и *1* есть отображение

$$\frac{\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}}{(f(x))_x^{\leqslant d}} \to \frac{\mathbf{R}[x]^{\leqslant d}}{(f(x))_x^{\leqslant d}},$$

индуцированное отображением $\mathbf{R}[x] \ni F(x) \mapsto (E(y_*)\cdot F(y)).B(x,y) \in \mathbf{R}[x]$. Это отображение является тождественным, так как в силу *2* теоремы 5 для любого $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$ имеет место $F(x) - (E(y_*)\cdot F(y)).B(x,y) \in (f(x))_x^{\leqslant d}$. Следовательно, индуцированные отображения в *1* и *2* являются взаимно обратными.

Теорема 6. *Пусть $\mathbf{R}$ — коммутативное кольцо с единицей, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — переменные, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ — полиномы из $\mathbf{R}[x]$, $\delta_f = \sum\limits_{i=1}^{n} \deg(f_i) - n$; $h(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, $\delta_{f,h} = \sum\limits_{i=1}^{n} \deg(f_i) + \deg(h) - n$. Положим*

$$B(x,y) = \det \left\| \begin{matrix} \nabla f(x,y) & \nabla h(x,y) \\ f(x) & h(x) \end{matrix} \right\| = \det \left\| \begin{matrix} \nabla f(x,y) & \nabla h(x,y) \\ f(y) & h(y) \end{matrix} \right\|,$$

где $\nabla h(x,y) = \nabla_x(x,y).h(x)$. Тогда $B(x,y)$ является безутианом полиномов $(f(x), h(x))$, и имеет место $\delta_{f,h} = \delta_f + d$.

Пусть $E(x_*) \in \mathbf{R}[x]_*$ и аннулирует $(f(x), h(x))_x^{\leqslant\delta_{f,h}-1}$, $E(y_*).B(x,y) = 1$. Тогда $E(x_*)$ аннулирует $(f(x), h(x))_x^{\leqslant\delta_f+d-1}$ и $E(x_*)*h(x) = 1$. Кроме того:

1. Если $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle}$, где $\triangle \geqslant \delta_f + d$, то

$$F(x) - (E(x_*)*F(x))\cdot h(x) \in (f(x))_x^{\leqslant\triangle}, \qquad E(x_*)*F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle-d}.$$

2. Если $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle} \bigcap (f(x))_x^{\leqslant D}$, где $\triangle \geqslant \delta_f + d$, то

$$F(x) - (E(x_*)*F(x))\cdot h(x) \in (f(x))_x^{\leqslant\triangle}, \qquad E(x_*)*F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant\triangle-d} \bigcap (f(x))_x^{\leqslant D-d}.$$

Доказательство. Из первой части теоремы 2 следует, что $B(x,y)$ является безутианом полиномов $(f(x), h(x))$, $\delta_{f,h} = \delta_f + d$, $E(x_*)*h(x) = E(y_*).B(x,y) = 1$.

Так как $\triangle \geqslant \delta_f + d$, то $\triangle > \delta_f + d - 1$. Тогда $(f(x), h(x))_x^{\leqslant \delta_f+d-1} = (f(x), h(x), F(x))_x^{\leqslant \delta_f+d-1}$, поскольку $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle}$. Так как $E(x_*)$ аннулирует $(f(x), h(x))_x^{\leqslant \delta_f+d-1}$, то $E(x_*)$ аннулирует $(f(x), h(x), F(x))_x^{\leqslant \delta_f+d-1}$. Тогда в силу *2* теоремы 1

$$(E(x_*)*h(x))\cdot F(x) - (E(x_*)*F(x))\cdot h(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d+\triangle-\delta-1},$$

так как $h(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant d}$, $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle}$. Так как $E(x_*)*h(x) = 1$, то $(E(x_*)*h(x))\cdot F(x) = 1\cdot F(x) = F(x)$. Следовательно,

$$F(x) - (E(x_*)*F(x))\cdot h(x) \in (f(x))_x^{\leqslant d+\triangle-\delta-1}.$$

Доказательство 1. Так как $E(x_*)$ аннулирует $(f(x), F(x))_x^{\leqslant \delta_f+d-1}$ и $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle}$, то в силу *1* теоремы 2 $E(x_*)*F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle-(d-1)-1} = \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle-d}$.

Доказательство 2. Так как $E(x_*)$ аннулирует $(f(x), F(x))_x^{\leqslant \delta_f+d-1}$ и $F(x) \in (f(x))_x^{\leqslant D}$, то в силу *3* теоремы 2 из [1] $E(x_*)*F(x) \in (f(x))_x^{\leqslant D-(d-1)-1} = (f(x))_x^{\leqslant D-d}$. Так как $F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle}$, то в силу *1* теоремы $E(x_*)*F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle-d}$. Следовательно, $E(x_*)*F(x) \in \mathbf{R}[x]^{\leqslant \triangle-d} \bigcap (f(x))_x^{\leqslant D-d}$.

1. *Seifullin T. R.* Extension of bounded root functionals of a system of polynomial equations // Доп. НАН України. – 2002. – № 7. – С. 35–42.
2. *Сейфуллин Т. Р.* Продолжение корневых функционалов системы полиномиальных уравнений и редукция полиномов по модулю ее идеала // Там само. – 2003. – № 7. – С. 19–27.
3. *Сейфуллин Т. Р.* Нахождение базиса пространства всех корневых функционалов системы полиномиальных уравнений и базиса ее идеала путем операции расширения ограниченных корневых функционалов // Там само. – 2003. – № 8. – С. 29–36.
4. *Сейфуллин Т. Р.* Расширение ограниченных корневых функционалов переопределенной системы полиномиальных уравнений // Там само. – 2005. – № 8. – С. 25–30.
5. *Сейфуллин Т. Р.* Безутиан и ограниченные корневые функционалы системы полиномов // Там само. – 2010. – № 10. – С. 22–28.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 14.01.2010

T. R. Seifullin

A Bezoutian and the extension operation of bounded root functionals

A root functional (element of Macaulay's inverse system) is a linear functional that is defined on a polynomial ring and annuls the ideal of polynomials. A bounded root functional is a functional that annuls the d-th component of the ideal in its some semigrading. We consider the interconnection between the action of bounded root functionals on a multivariate Bezoutian and the extension operation of bounded root functionals.