Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2010

ФІЗИКА

УДК 519.217.5+519.218.4

© 2010

Ю. П. Вирченко, М. А. Сапрыкин

Флуктуационный подход в теории радиационно-кондуктивного теплообмена

(Представлено академиком НАН Украины С. В. Пелетминским)

Розглядається проблема радіаційно-кондуктивного теплообміну у діелектричному середовищі. Вивчається механізм теплообміну за допомогою випромінювання, що породжується тепловими флуктуаціями електричної поляризації. Обчислюється густина потоку енергії випромінювання у вигляді функціонала від розподілу температури у середовищі.

1. Перенос тепла в твердотельной среде осуществляется двумя механизмами — посредством теплопроводности и электромагнитным излучением, порождаемым тепловыми возбуждениями состояния среды. В соответствии с этим эволюционное уравнение для распределения температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в момент времени t должно записываться в виде [1]

$$\rho\lambda\dot{T}(\mathbf{r}, t) = \kappa\Delta T(\mathbf{r}, t) - (\nabla, \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)), \tag{1}$$

где $\kappa > 0$ — коэффициент теплопроводности среды; ρ — плотность среды и λ — ее теплоемкость (в предположении постоянства этих характеристик среды). Второе слагаемое в правой части (1), определяемое плотностью потока энергии электромагнитного излучения $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$, которое переносит тепло, ответственно за механизм радиационно-кондуктивного теплообмена. Центральным, для постановки задач радиационно-кондуктивного теплообмена, является вычисление плотности $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ в виде функционала $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{S}[T(\mathbf{r}, t)]$ от распределения температуры. После этого уравнение (1) для $T(\mathbf{r}, t)$ становится самосогласованным. Обычно плотность потока энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ определятся на основе феноменологических соображений об интенсивности переноса энергии излучения [1, 2]. Однако в такого рода рассуждениях само электромагнитное поле, осуществляющее перенос тепла, не используется. Это положение является неудовлетворительным с теоретической точки зрения. Оно связано с отсутствием последовательной микроскопической теории радиационно-кондуктивного теплообмена, которая должна быть основана на квантовой теории излучения и поглощения электромагнитного излучения (фотонов) молекулами среды и, следовательно, носить статистический характер.

В настоящей работе предлагается частичное решение этой проблемы. Для простоты, мы ограничиваемся случаем диэлектрической среды, когда ее электромагнитные свойства полностью характеризуются динамической диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, зависящей от частоты излучения ω, и постоянной магнитной проницаемостью μ. С микроскопической точки зрения мы будем считать, что среда состоит из молекул с ковалентной связью. При достаточно большой температуре порядка температуры плавления материала, т. е. при достаточно большой амплитуде тепловых колебаний, молекулы переходят в энергетически возбужденные состояния. Релаксация возбуждений приводит к излучению фотонов с частотой, пропорциональной разности соответствующих энергетических уровней с изменением динамического состояния каждой из молекул. Излученные фотоны могут снова, после распространения в среде, поглощаться другими молекулами среды и переизлучаться. При этом возникает механизм перекачки энергии как из фотонной подсистемы в фононную, так и обратно. При наличии градиента температуры в среде переизлучение фотонов молекулами в ее различных областях носит нескомпенсированный характер. Это положение является следствием сильной связанности молекул твердотельной среды. Энергия, равная разности между энергиями поглощенных и излученных фотонов, переходит в энергию неупорядоченных колебаний молекул среды около их положения равновесия. Среднее же значение этой энергии определяет температуру среды, сосредоточенной в рассматриваемом элементе объема. Последовательное вычисление величины $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$, к которой приводит наличие описанного физического механизма переноса тепла излучением, сводится к составлению и решению кинетического уравнения для фотон-фононной системы.

Такой подход к описанию радиационно-кондуктивного теплообмена уже на первоначальном шаге, т. е. при составлении эффективного гамильтониана взаимодействия, оказывается очень сложным для реализации из-за необходимости учета сильной связи системы молекул. Поэтому мы в этой работе развиваем более простой полуфеноменологический подход. Мы преодолеваем главный недостаток существующей теории — вводим в теорию электромагнитное поле, ответственное за перенос тепловой энергии. Однако при этом не конкретизируется микроскопический механизм превращения его энергии в тепловую энергию тепловых колебаний среды. Более того, мы отказываемся от квантового описания излучения ввиду того, что само явление радиационно-кондуктивного теплообмена не является квантовым эффектом. Предлагаемая нами модель формулируется в приближении сплошной среды и она основана на представлении о флуктуациях $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ дипольного электрического момента совокупности молекул среды в элементе объема, сосредоточенного около пространственной точки $\mathbf{r}$ в момент времени t при поглощении и испускании ими фотонов. При этом квантовая природа излучения электромагнитного поля в нашей модели проявляется только лишь в том, что эти флуктуации носят случайный характер, т. е. $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ представляет собой с математической точки зрения случайный процесс.

2. Конструкция модели. Мы исходим из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в *сплошной* среде

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + [\nabla, \mathbf{E}] = 0, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - [\nabla, \mathbf{H}] = 0, \tag{2}$$

$$(\nabla, \mathbf{D}) = 0, \qquad (\nabla, \mathbf{B}) = 0, \tag{3}$$

где магнитная индукция $\mathbf{B}$ имеет вид $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ($\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля). Так как среда диэлектрическая, то в уравнения (2), (3) не включены флуктуации макроскопических электрических токов и зарядов. При построении связи между электрической индукцией $\mathbf{D}$ в среде и напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ должны быть учтены флуктуационные изменения электрической поляризации среды в результате процессов излучения и поглощения фотонов в каждой пространственно-временной точке $(\mathbf{r}, t)$. Для этого она выражается в виде двух слагаемых: $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$. Первое представляет собой поляризацию, индуцированную электрической напряженностью $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, распространяющегося в среде излучения. А именно, $\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \chi(\omega)\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, где $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ и $\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$ — соответствующие Фурье-компоненты и $\chi(\omega) = (\varepsilon(\omega) - 1)/4\pi$ — динамическая электрическая восприимчивость среды. Второе слагаемое $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ связано с существованием не зависящих от $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ случайных флуктуаций поляризации среды, которые возникают вследствие процессов поглощения и излучения фотонов каждой из молекул. Это слагаемое представляет собой неоднородное по пространству случайное поле, статистически независимое в каждой пространственной точке $\mathbf{r}$. Неоднородность связана с наличием неоднородности распределения температуры в среде и с зависимостью средней амплитуды флуктуаций от температуры. Оно описывает статистически независимые акты поглощения и излучения фотонов каждой из молекул. Поле $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ считается гауссовским ввиду малости флуктуаций.

Кроме того, не ограничивая общности, среднее значение флуктуаций считаем равным нулю, $\langle \widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$, где угловые скобки здесь и далее обозначают усреднение. Тогда статистические свойства этого поля полностью определяются парным коррелятором $\langle \widetilde{P}_j(\mathbf{r}, t)\widetilde{P}_{j'}(\mathbf{r}', t') \rangle$, $j, j' = 1, 2, 3$ для каждой пары пространственно-временных точек $(\mathbf{r}, t)$ и $(\mathbf{r}', t')$. Вследствие пространственной независимости и изотропии флуктуаций этот коррелятор пропорционален $\delta_{jj'}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, $j, j' = 1, 2, 3$. Его зависимость $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ от пространственной координаты полностью определяется мгновенным распределением температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в среде. Так как масштабы времени, один из которых характеризует поглощение и испускание фотонов, а второй — изменения распределения температуры, существенно различны, необходимо считать, что амплитуда среднего квадрата поля $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ является медленной функцией времени, что не должно учитываться при усреднении случайных флуктуаций $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$. Тогда, выполнив преобразование Фурье по быстрому времени, случайную функцию $\overline{\widetilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r}, \omega)$ необходимо также считать гауссовской с нулевым средним $\langle \overline{\widetilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 0$, вследствие линейности этого преобразования [3]. Таким образом, случайная поляризация $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется коррелятором случайной функции $\overline{\widetilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r}, \omega)$. В соответствии со сказанным, мы считаем, что

$$\overline{\widetilde{\mathbf{P}}}(\mathbf{r}, \omega) = U(T(\mathbf{r}, t), \omega)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \omega), \tag{4}$$

где амплитуда $U(T, \omega)$ является неслучайной функцией температуры T и частоты ω. По соображениям размерности, эта функция должна быть такой, что $|U(T, \omega)|^2 = \tau\hbar\omega W(\hbar\omega/T)$, где $\tau^{-1} \approx 2 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$ — характерная частота переходов между молекулярными энергетическими уровнями при характерной температуре порядка 10^3 K, сравнимой с температурой плавления материала, а $W(\cdot)$ — плотность распределения числа фотонов по энергиям. Случайная вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \omega)$ в (4) полагается гауссовской с нулевым средним $\langle \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 0$ и с парным коррелятором

$$\langle \varphi_j(\mathbf{r}, \omega)\varphi^*_{j'}(\mathbf{r}', \omega') \rangle = (2\pi)^{-1}\delta_{jj'}\delta(\omega - \omega')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{5}$$

Зависимость от ω функции $U(T, \omega)$ приводит к тому, что временной коррелятор случайного процесса $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t)$ не пропорционален $\delta(t - t')$. Это отражает тот факт, что в предлагаемой модели существенен учет корреляций на коротких временах, а длинные электромагнитные волны практически не принимают участия в переносе тепла.

На основе известной (см., например, [4]) связи между спектральными плотностями электрической индукции $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega)$ и электрической поляризации среды имеем

$$\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{r},\omega) = \varepsilon(\omega)\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega) + 4\pi U(T,\omega)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},\omega). \tag{6}$$

Эта формула, вместе с уравнениями (2), (3), составляет основу нашей теории.

Решения уравнений (2), (3) необходимо строить с учетом двухмасштабности временно́й зависимости полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, которая состоит из быстрой зависимости фазы электромагнитного поля, переносящего излучение, и медленной зависимости его амплитуды, связанной с изменением распределения температуры. На основе таких решений должна быть вычислена плотность потока энергии $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{E},\mathbf{H}]$, усредненная по случайным изменениям электрической поляризации $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ и по быстрой временно́й зависимости.

Решения системы уравнений (2), (3) ищутся в виде следующих разложений:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)\,d\omega, \qquad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega)\,d\omega,$$

где $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$ и $\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega)$ являются функционалами от распределения температуры $T(\mathbf{r},t)$ и, следовательно, через посредство этой зависимости — функциями от "медленного" времени t. Уравнения для спектральных амплитуд $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega)$, $\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},\omega)$ имеют вид

$$\frac{i\mu\omega}{c}\overline{\mathbf{H}} + [\nabla,\overline{\mathbf{E}}] = 0, \qquad \frac{i\omega}{c}(\varepsilon(\omega)\overline{\mathbf{E}} + 4\pi U(T,\omega)\boldsymbol{\varphi}) - [\nabla,\overline{\mathbf{H}}] = 0,$$
$$(\nabla, \varepsilon(\omega)\overline{\mathbf{E}} + 4\pi U(T,\omega)\boldsymbol{\varphi}) = 0, \qquad (\nabla,\overline{\mathbf{H}}) = 0.$$

Тогда, для получения главного члена асимптотического разложения решений при большой величине частоты ω, необходимо решать уравнение

$$\overline{k}^2(\omega)\overline{\mathbf{E}} + \Delta\overline{\mathbf{E}} = -C\omega^2 U\boldsymbol{\varphi}, \tag{7}$$

где $\overline{k}^2 = \omega^2\mu\varepsilon(\omega)/c^2$, $C = 4\pi\mu/c^2$. При этом динамическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ является комплексной, что обеспечивает затухание электромагнитной волны в отсутствие возмущения в (7). Так как $\varepsilon(\omega) \to \varepsilon$ при $\omega \to \infty$ с $\varepsilon > 0$, то $\varepsilon(\omega) = \varepsilon - i\nu/\omega + o(\omega^{-1})$ с $\nu > 0$, что приводит к следующему выражению для квадрата волнового вектора: $\overline{k}^2 = k_*^2 - ik_*\gamma$, $k_* = \omega(\varepsilon\mu)^{1/2}/c$, $\gamma = (\nu/c)(\mu/\varepsilon)^{1/2}$.

Вычисление асимптотик решений уравнения (7) в приближении эйконала позволяет найти спектральную амплитуду $\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r},\omega)$ плотности потока энергии $\mathbf{S}(\mathbf{r},t)$, усредненную по случайной электрической поляризации $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$,

$$\langle\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r},\omega)\rangle = \frac{c}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle[\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},\omega'),\overline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r},\omega'-\omega)]\rangle\,d\omega'. \tag{8}$$

3. Решение одномерной задачи. Рассмотрим подробнее, в рамках предложенной теории радиационно-кондуктивного теплообмена, одномерную задачу в пластине толщиной L, когда поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ являются только функциями одной координаты x и поле $\mathbf{E}(x,t)$

можно сделать поперечным так, что $(\nabla, \boldsymbol{\varphi}) = 0$, $\overline{E}_1 = 0$. Плотность потока энергии вычисляется на основе решения уравнения (7) на отрезке $x \in [-L/2, L/2]$, когда поле $\overline{\mathbf{E}}$ имеет отличные от нуля компоненты $\overline{E}_2$ и $\overline{E}_3$. При этом вне отрезка $\varepsilon(\omega) = \mu = 1$, $U \equiv 0$ и $\overline{\mathbf{E}}(x,\omega) = \mathbf{E}_{+,0} \exp[-ik(x-L/2)]$ при $x > L/2$, $\overline{\mathbf{E}}(x,\omega) = \mathbf{E}_{-,0} \exp[ik(x+L/2)]$ при $x < -L/2$, где $\mathbf{E}_{\pm,0}$ — постоянные двухкомпонентные векторы, перпендикулярные 1-й оси. Совместно с граничными условиями на границах $x = \pm L/2$ непрерывности поля $\overline{\mathbf{E}}(x,\omega)$ и его производной по x, получается краевая задача для стохастического уравнения (7) с условиями $\overline{\mathbf{E}}'(\pm L/2,\omega) = \mp ik\overline{\mathbf{E}}(\pm L/2,\omega)$. В одномерном случае в формуле (8) отлична от нуля только первая компонента $S_1 \equiv S$ плотности потока энергии. Пусть

$$G(x,y,\omega) = \frac{i}{2\overline{k}}\big(1 - \varkappa^2 e^{-2i\overline{k}L}\big)^{-1}\big[e^{-i\overline{k}|x-y|} + 2\varkappa e^{-i\overline{k}L}\cos[\overline{k}(x+y)] + \varkappa^2 e^{-2i\overline{k}L} e^{i\overline{k}|y-x|}\big] \text{ —}$$

функция Грина рассматриваемой краевой задачи, где введен коэффициент отражения $\varkappa = (\overline{k} - k)/(\overline{k} + k)$. Она удовлетворяет уравнению

$$G''(x,y,\omega) + \overline{k}^2 G(x,y,\omega) = \delta(x-y) \tag{9}$$

и граничным условиям $G'(\pm L/2, y, \omega) = \mp ikG(\pm L/2, y, \omega)$. Фурье-компоненты электрического и магнитного полей определяются формулами

$$\overline{\mathbf{E}}(x,\omega) = -C\omega^2 \int\limits_{-L/2}^{L/2} G(x,y,\omega) U(T(y,t),\omega) \boldsymbol{\varphi}(y,\omega)\, dy,$$

$$\overline{H}_j(x,\omega) = -\frac{ic}{\mu\omega}\epsilon_{1jl}\overline{E}_l'(x,\omega), \qquad j = 2,3,$$

ϵ_{jlm} — полностью антисимметричный псевдотензор. Используя эти разложения и формулу (5) для коррелятора флуктуационного поля, находим выражение для спектральной плотности потока энергии поля

$$\langle \overline{S}(x,\omega)\rangle = -\delta(\omega)\frac{4i\mu}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega'^3 \int\limits_{-L/2}^{L/2} G(x,y,\omega') G^{*\prime}(x,y',\omega') |U(T(y,t),\omega')|^2 dy d\omega'. \tag{10}$$

Так как Фурье-образ потока энергии $\mathbf{S}(x,\omega)$ обладает свойством $\overline{\mathbf{S}}^*(x,\omega) = \overline{\mathbf{S}}(x,-\omega)$ и выражение (10) четно по переменной ω, то среднее $\langle\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{r},\omega)\rangle$ вещественно. Тогда действительная часть выражения в правой части (10) имеет вид

$$\langle \overline{S}(x,\omega)\rangle = \delta(\omega)\frac{4\mu}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega'^3 \int\limits_{-L/2}^{L/2} |U(T(y,t),\omega')|^2 \operatorname{Im}[G(x,y,\omega') G^{*\prime}(x,y,\omega')]\, dy d\omega'.$$

На основании (9) имеет место

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Im}[G(x,y,\omega)G^{*\prime}(x,y,\omega)] = \operatorname{Im}[\overline{k}^2]|G(x,y,\omega)|^2 + \delta(x-y)\operatorname{Im} G(x,x,\omega),$$

где $\mathrm{Im}[\overline{k}^2] = -\gamma k_*$, $k_* = \omega'(n/c)$ и $n = (\epsilon\mu)^{1/2}$ — оптический показатель среды. Дивергенция Фурье-образа потока энергии имеет вид

$$\langle(\nabla, \mathbf{S}(x,t))\rangle = -\frac{4\mu}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega'^3 \times$$

$$\times\left[\frac{\gamma n}{c}\omega'\int\limits_{-L/2}^{L/2}|U(T(y,t),\omega')|^2|G(x,y,\omega')|^2 dy - |U(T(x,t),\omega')|^2\,\mathrm{Im}\,G(x,x,\omega')\right]d\omega'. \quad (11)$$

Полученное выражение пропорционально $\delta(\omega)$. Это означает, что дивергенция потока энергии уже не содержит быстрой зависимости от времени.

Так как $\overline{k}^{2*}(\omega) = \overline{k}^2(-\omega)$ и $G'^*(\pm L/2, y, \omega) = \mp k(-\omega)G^*(\pm L/2, y, \omega)$, то функция $G^*(x, y; \omega)$ обладает свойством $G^*(x, y, \omega) = G(x, y - \omega)$. По той же причине Фурье-образы $\overline{\overline{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},\omega)$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},\omega)$ удовлетворяют соотношениям $\overline{\overline{\mathbf{P}}}^*(\mathbf{r},\omega) = \overline{\overline{\mathbf{P}}}(\mathbf{r},-\omega)$, $\boldsymbol{\varphi}^*(\mathbf{r},\omega) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},-\omega)$. Тогда из формулы (6) следует, что $U^*(T,\omega) = U(T,-\omega)$. Это свойство приводит к тому, что подынтегральное выражение в (11) четно относительно ω.

4. Случай высоких температур. Радиационно-кондуктивный теплообмен вносит существенный вклад в изменение распределения температуры в полупрозрачном диэлектрике в том случае, когда его характерная температура достаточно высока. Характерная частота излучаемых фотонов должна быть такой, чтобы их энергия была порядка этой температуры в энергетических единицах. При характерной частоте $\tau^{-1} \approx 2\cdot 10^{14}$ с$^{-1}$ соответствующая температура сравнима с температурой плавления диэлектрика. В рассматриваемом случае формула (11) принимает вид

$$\langle(\nabla, \mathbf{S}(x,t))\rangle = -\frac{8\mu\tau c^2}{(nT_0L)^4}\left[\frac{\gamma}{T_0 L}\int\limits_{-L/2}^{L/2} T^6(y,t)\int\limits_0^{\infty}\zeta^5 W(\zeta)|G(x,y,\omega_y)|^2 d\zeta dy -\right.$$

$$\left. - T^5(x,t)\int\limits_0^{\infty}\zeta^4 W(\zeta)\,\mathrm{Im}\,G(x,x,\omega_x)\,d\zeta\right], \quad (12)$$

где $\omega_y = T(y,t)\zeta/\hbar$ в интеграле по безразмерной переменной ζ и введена характерная температура $T_0 = \hbar c/nL$. При $n = 1{,}5$ и $L = 1$ см $T_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-1}$ К. Следовательно, отношение типичной температуры $T(y,t) \approx 10^2 \div 10^3$ К к T_0 является большим параметром $\approx 10^4$ и отношение $T(y,t)\zeta/T_0$ в области интегрирования по ζ представляет собой большую величину $\overline{k}L \approx T(y,t)\zeta/T_0 - \delta$, где отношение $\delta = \gamma L/2$ характеризует оптическую длину затухания электромагнитного поля в среде. Его типичное значение изменяется в пределах $\delta = 0{,}1 \div 10$ и, поэтому, второе слагаемое мало́ по сравнению с первым. Тогда, с той же точностью, $\varkappa \approx (n-1)(n+1)$, где поправочное слагаемое имеет порядок $\delta T_0/T(y,t)\zeta$ и является очень малым в допустимом диапазоне изменения δ. Поэтому, при вычислении интеграла в (12) можно положить коэффициент $\varkappa$ чисто вещественным, не зависящим от T и от переменной интегрирования ζ. По той же причине можно положить величину $\overline{k}^{-1}$ в выражении для $|G(x,y,\omega)|^2$ равной $\overline{k}^{-1} \approx T_0L/T(y,t)\zeta$.

При наличии большого параметра T/T_0 внутренний интеграл в (12) представляет собой быстро осциллирующую функцию. Тогда достаточно воспользоваться главным членом асимптотики этого интеграла при $T/T_0 \to \infty$. В результате, мы приходим к следующему выражению для плотности потока энергии:

$$\langle(\nabla, \mathbf{S}(x,t))\rangle = -\frac{2\alpha\gamma}{1-(\varkappa e^{-\delta})^4} \int\limits_{-L/2}^{L/2} T^4(y,t)\biggl[\exp\biggl(-\frac{2\delta|x-y|}{L}\biggr) + \\ + (\varkappa e^{-\delta})^4 \exp\biggl(\frac{2\delta|x-y|}{L}\biggr) + 2(\varkappa e^{-\delta})^2 \mathrm{ch}\biggl[\frac{2\delta(x+y)}{L}\biggr]\biggr] dy + 4\alpha T^4(x,t), \tag{13}$$

где введен коэффициент $\alpha = \dfrac{\mu\tau c^2 E}{n^4(T_0 L)^3} = \tau\Bigl(\dfrac{\mu}{\varepsilon}\Bigr)^{1/2} \dfrac{k_B^4}{\hbar^3 c} E$, $E = \int\limits_0^\infty \zeta^3 W(\zeta)\, d\zeta$ в том случае, когда температура выражается в градусах, $k_B = 1{,}4\cdot 10^{-16}$ эрг/K — постоянная Больцмана.

В выражении (13) интегральное ядро не зависит от функции распределения W фотонов. При большой величине $\delta \gg 1$ последними двумя слагаемыми в подынтегральном выражении можно пренебречь, а оставшееся ядро $e^{-2\delta|x-y|/L}$ превращается в δ-функцию $2\gamma^{-1}\delta(x-y)$. Тогда интегральное слагаемое в (13), при $\delta \to \infty$, стремится к $(-4\alpha T^4(x,t))$, и поэтому второе слагаемое в правой части эволюционного уравнения (1) обращается в нуль. Это означает, что в случае сильного поглощения весь теплообмен определяется теплопроводностью. В случае слабого поглощения $\gamma \to 0$ первое слагаемое в потоке энергии равно нулю, в то время как последнее слагаемое в (13) не исчезает при $\gamma = 0$ и $\langle(\nabla, \mathbf{S}(x,t))\rangle = -4\alpha T^4(x,t)$, т. е. среда остывает вследствие радиационно-кондуктивного теплообмена по закону Стефана–Больцмана. При этом вклад радиационно-кондуктивного теплообмена в эволюцию распределения температуры, согласно уравнению (1), мал и приводит к относительной поправке $\sim 10^{-2}$, так как при $E \approx 1$, в указанных выше условиях, величина $-4\alpha T^4(x,t)$ имеет порядок 10^5 эрг/см $\cdot$ с$\cdot$K. Слагаемое же в уравнении (1), ответственное за теплопроводность, имеет порядок 10^7 эрг/см$^3\cdot$ с при $L \approx 1$ см и при коэффициенте теплопроводности $\kappa \approx 10^4$эрг/см$\cdot$с$\cdot$ K и $T = 10^3$ K.

1. *Спэрроу Э. М., Сесс Р. Д.* Теплообмен излучением. – Ленинград: Энергия, 1972. – 295 с.
2. *Рубцов Н. А.* Теплообмен излучением в сплошных средах. – Новосибирск: Наука, 1984. – 278 с.
3. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Т. II. Случайные поля, изд. 2-е. – Москва: Наука, 1978. – 464 с.
4. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества, 11-е изд. – Москва: Физматлит, 2006. – 616 с.

Институт монокристаллов НАН Украины, Харьков
Поступило в редакцию 05.05.2010

Yu. P. Virchenko, M. A. Saprykin

Fluctuation approach in heat radiative conductivity theory

The problem of heat radiative conductance in a dielectric medium is considered. The mechanism of heat conductivity by the radiation generated by thermal fluctuations of the electrical polarization is studied. The energy flux density of the radiation is evaluated in the form of a functional of the temperature distribution in the medium.