УДК 539.3

В. О. Вахненко

Подібність автомодельних потоків газу та двофазного середовища з нестисливою компонентою

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. А. Даниленком)

Запропоновано перетворення між визначальними рівняннями для ідеального газу і двофазного середовища з довільним об'ємним вмістом конденсованої фази. Доведено, що рух двофазного середовища в перетвореній системі координат з визначеною точністю подібний до руху ідеального газу, що дозволяє використовувати для розв'язання ударно-хвильових задач відомі методи газодинаміки ідеального газу. На прикладі задачі про сильну стадію вибуху в двофазному середовищі продемонстровано можливості розробленого методу.

У даному повідомленні порівнюються рухи ідеального газу і двокомпонентного середовища, яке складається з компонент, що стискаються і не стискаються. Відомо [1–3], що коли об'ємна частка конденсованої фази мала, рух двофазного середовища подібний до руху ідеального газу в межах одношвидкісної моделі. Якщо ми не обмежуємо наш розгляд величиною об'ємної частки конденсованої фази, тоді основні гідродинамічні рівняння містять цю величину як додаткову змінну в газодинамічних рівняннях. Це значно ускладнює розв'язування гідродинамічних рівнянь і потребує розвитку методів, наведених, наприклад, в статтях [4, 5].

Зосередимося на перетворенні системи рівнянь ідеального газу в систему рівнянь двофазного середовища з будь-яким об'ємом конденсованої фази. Завдяки такому зв'язку, методи, які розвинуті для ідеального газу, можуть бути використані для розв'язання хвильових задач двокомпонентних середовищ.

Раніше нами було отримано перетворення лише для плоских рухів [6, 7] в ейлерових координатах $(r,\, t)$ між системами рівнянь, які описують обидва середовища. Було показано, що в цьому випадку рух двокомпонентного середовища в трансформованих координатах подібний до руху ідеального газу. В цих роботах також аналізувалися і порівнювалися системи рівнянь, які описують газ і двокомпонентне середовище в ейлерових координатах для одновимірних рухів як циліндричної, так і сферичної симетрій. На той час було отримано перетворення, що мало істотне обмеження, а саме, для циліндричної та сферичної симетрій час змінюється неоднаково для різних точок простору [6, 7].

1. Система рівнянь в лагранжевих координатах. Нами зроблено зусилля, щоб обійти це обмеження. Певною мірою нам це вдалося завдяки стимулюючій підтримці колег. Одна з ідей полягає в тому, щоб записати систему рівнянь у лагранжевих координатах $(\xi,\, \tau)$. Розглянемо двофазне середовище, яке складається з рівномірно розподіленого в газовій фазі конденсованого компонента, що займає довільний об'єм ε. Припустимо, що: а — конденсована фаза нестислива; б — газ задовольняє рівнянню стану ідеального газу; в —

швидкості конденсованої фази й газу рівні. Закони збереження маси, імпульсу та енергії для одновимірних рухів у лагранжевих координатах набувають вигляду [8, 9]:

$$\begin{gathered}
\frac{r^{\nu-1}}{\xi^{\nu-1}}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)_{\tau}=\frac{v}{v_0}, \qquad u=\left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\right)_{\xi}, \\
\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_{\xi}+v_0\left(\frac{r}{\xi}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\tau}=0, \qquad \frac{\partial E}{\partial \tau}+pv_0\xi^{1-\nu}\left(\frac{\partial r^{\nu-1}u}{\partial \xi}\right)_{\tau}=0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Тут v — питомий об'єм. Параметр ν, який визначає симетрію двофазного потоку, приймає значення 1, 2 або 3 відповідно для плоскої, циліндричної або сферичної симетрій. Другі позначення загальновживані. Індекс 0 означає величини до незбуреного середовища. Відзначимо, що ейлерова просторова координата $r=r(\xi,\tau)$ — залежна змінна. В межах прийнятих припущень рівняння стану двофазного середовища записується у вигляді [1, 5, 10]:

$$E=\frac{pv(1-\varepsilon)}{\gamma-1}. \tag{2}$$

Отже, рівняння стану (2) не збігається з рівнянням стану ідеального газу з конкретним ефективним показником адіабати γ та утримує об'ємну частку конденсованої фази як додаткову змінну

$$\varepsilon=\varepsilon_0\frac{v_0}{v}. \tag{3}$$

Розглядаючи адіабатичний потік ($\gamma=\mathrm{const}$), рівняння енергії зведемо до вигляду [9]:

$$\left(\frac{\partial p(v-\varepsilon_0 v_0)^{\gamma}}{\partial \tau}\right)_{\xi}=0. \tag{4}$$

Таким чином, замкнена система рівнянь складається з перших трьох рівнянь (1) та рівнянь (3), (4).

Зазначимо, що співвідношення між ейлеровою і лагранжевою просторовими координатами має вигляд

$$dr=\frac{\xi^{\nu-1}}{r^{\nu-1}}\frac{v}{v_0}d\xi+ud\tau. \tag{5}$$

Покажемо, що для стаціонарних (та, з певною точністю, для автомодельних) потоків можна знайти нові змінні, в яких усі рівняння повністю подібні до рівнянь ідеального газу та явно не залежать від ε. Для таких потоків буде знайдено зв'язок (перетворення) між старими нештрихованими (двофазне середовище) та новими штрихованими (ідеальний газ) змінними.

Такі фізичні аргументи дають підгрунтя для виключення об'єму конденсованої фази з (1), (2), (4). Дійсно, якщо конденсована фаза не змінюється в об'ємі, тобто в ній збурення передається миттєво (умова (а)), і вона не дає внесок у тиск (умова (б)) та рухається разом з газовою фазою (умова (в)), тоді можна сподіватися, що виключення об'єму, який займає конденсована фаза, повинне значно спростити математичний опис руху.

2. Подібність стаціонарних рухів газу та двофазного середовища. Нам потрібно привести початкову систему рівнянь (1)–(4) до системи рівнянь, яка описує ідеальний газ (змінні позначені штрихом):

$$\left(\frac{r'}{\xi'}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\partial r'}{\partial \xi'}\right)_{\tau'} = \frac{v'}{v'_0}, \qquad u' = \left(\frac{\partial r'}{\partial \tau'}\right)_{\xi'},$$
$$\left(\frac{\partial u'}{\partial \tau'}\right)_{\xi'} + v'_0\left(\frac{r'}{\xi'}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\partial p'}{\partial \xi'}\right)_{\tau'} = 0, \qquad \left(\frac{\partial p'(v')^{\gamma}}{\partial \tau'}\right)_{\xi'} = 0. \tag{6}$$

Для цієї системи рівнянь зв'язок між ейлеровою і лагранжевою просторовими координатами набуває такого вигляду:

$$dr' = \left(\frac{\xi'}{r'}\right)^{\nu-1}\frac{v'}{v'_0}d\xi' + u'd\tau'. \tag{7}$$

Одна з ключових вимог: перебіг часу однаковий в усіх системах координат, тобто $t = \tau = \tau'$.

Хвилі в фазі, що не стискається, поширюються з безмежно великою швидкістю. Отже, об'єм цієї фази може бути виключено, тоді зв'язок між рівнянням (4) та останнім рівнянням (6) має вигляд

$$v' = v - \varepsilon_0 v_0, \tag{8}$$

$$p' = p. \tag{9}$$

Це співвідношення вказує, що частина об'єму, яку займає нестислива фаза, виключається, а вся маса розподіляється рівномірно по всьому залишковому об'єму.

Порівнюючи рівняння неперервності між собою, тобто перші рівняння системи (1) та системи (6), маємо задовольнити вимозі

$$\varepsilon_0 + (1-\varepsilon_0)\left(\frac{r'}{\xi'}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\partial r'}{\partial \xi'}\right)_{\tau'} = \left(\frac{r}{\xi}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)_{\tau}. \tag{10}$$

Також потрібно узгодити рівняння імпульсу, які після деяких перетворень набувають такого вигляду:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_{\xi} - \gamma p_0\left(\frac{r}{\xi}\right)^{\nu-1}\left(\frac{v'_0}{v'}\right)^{\gamma+1}\frac{1}{1-\varepsilon_0}\left(\frac{\partial v'}{\partial \xi}\right)_{\tau} = 0, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial \tau'}\right)_{\xi'} - \gamma p'_0\left(\frac{r'}{\xi'}\right)^{\nu-1}\left(\frac{v'_0}{v'}\right)^{\gamma+1}\left(\frac{\partial v'}{\partial \xi'}\right)_{\tau'} = 0. \tag{12}$$

Скористаємося підказкою, яку дає перетворення між системами рівнянь в ейлерових координатах для плоского випадку ($\nu = 1$) [6, 7]. Ключове співвідношення між незалежними (в ейлерових координатах) просторовими змінними має вигляд (1.6в) з публікації [7]:

$$dr' = (1-\varepsilon)dr + \varepsilon u dt. \tag{13}$$

Члени з ε, що зібрані разом, за допомогою співвідношення (5) набувають значення $\varepsilon dr - \varepsilon udt = \varepsilon_0 d\xi$. Дана підказка (13) вказує, що зв'язок між штрихованою та нештрихованою системами рівнянь, можливо, набуває такої форми:

$$r'^{\nu-1}dr' = r^{\nu-1}dr - \varepsilon_0\xi^{\nu-1}d\xi. \tag{14}$$

У такий спосіб ми задовольняємо важливу умову, а саме: величина dr' є повним диференціалом, що, в свою чергу, дозволяє нам переписати співвідношення (14) в інтегральному вигляді

$$r'^{\nu} = r^{\nu} - \varepsilon_0\xi^{\nu}. \tag{15}$$

Безпосередньо з (14) випливає зв'язок між масовими швидкостями

$$r'^{\nu-1}u' = r^{\nu-1}u. \tag{16}$$

Прямою підстановкою цього співвідношення перевіряється вимога (10), яка зводиться до перетворення

$$\xi'^{\nu} = (1-\varepsilon_0)\xi^{\nu}. \tag{17}$$

Перетворюючи рівняння (11), приходимо до нового рівняння, яке, крім усіх членів рівняння (12), утримує додатковий член, а саме:

$$u'\left(\frac{r'}{r}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\partial(r/r')^{\nu-1}}{\partial\tau}\right)_{\xi}. \tag{18}$$

Позбутися додаткового члена можна, розглядаючи стаціонарні потоки, а також, можливо, описуючи автомодельний рух.

Таким чином, нами знайдено перетворення (8), (9), (15)–(17) між системами рівнянь (1)–(4) і (6) для стаціонарних потоків, тобто можна стверджувати, що не тільки для плоских потоків, а й для циліндричної та сферичної симетрій стаціонарний рух двофазного середовища повністю подібний до стаціонарного руху газу.

3. Автомодельні потоки з ударними хвилями. Вищезазначений метод надає певні переваги для розв'язування автомодельних задач. Застосуємо метод для розв'язування задачі про сильну стадію вибуху в двофазному середовищі.

Нехай певна кількість енергії E_0 миттєво виділяється в безмежно малому об'ємі двофазного середовища. Обмежуючись розглядом відстаней поширення ударних хвиль, до яких можна знехтувати початковою внутрішньою енергією середовища в порівнянні з E_0, проаналізуємо поширення ударної хвилі. Її швидкість визначається так:

$$D = \frac{dr_f}{dt}, \tag{19}$$

де r_f — координата фронту ударної хвилі; $r_f = r_f(t)$ є функцією тільки часу. Зазначимо, що $\xi_f = r_f$.

Визначимо нові незалежні змінні для систем рівнянь, що описують двофазний потік (1), (3), (4):

$$\begin{aligned} &P = \frac{v_0 p}{D^2}, \qquad U = \frac{u}{D}, \qquad V = \frac{v}{v_0}, \qquad \mu = \frac{\xi}{\xi_f}, \\ &\eta = \frac{r}{\xi_f}, \qquad \chi = \frac{\xi_f}{\tau_0 D}, \qquad z = \frac{\xi_f}{D^2}\frac{dD}{d\tau}, \end{aligned} \tag{20}$$

а також газ (6)

$$P' = \frac{v_0' p'}{D'^2}, \qquad U' = \frac{u'}{D'}, \qquad V' = \frac{v'}{v_0'}, \qquad \mu' = \frac{\xi'}{\xi_f'},$$
$$\eta' = \frac{r'}{\xi_f'}, \qquad \chi' = \frac{\xi_f'}{\tau_0 D'}, \qquad z' = \frac{\xi_f'}{D'^2}\frac{dD'}{d\tau'}, \qquad D' = \frac{d\xi_f'}{d\tau}. \tag{21}$$

З співвідношення (15) маємо:

$$r_f'^{\,\nu} = (1-\varepsilon_0) r_f^{\,\nu}, \qquad r_f'^{\,\nu-1} D' = (1-\varepsilon_0) r_f^{\,\nu-1} D. \tag{22}$$

На стадії сильної ударної хвилі за фронтом реалізується автомодельний потік, тобто: а — похідні по χ дорівнюють нулю; б — $z = z' = -\nu/2$ [4, 5, 8, 9]. Тоді можна переписати системи рівнянь для двофазного середовища таким чином:

$$\frac{\eta^{\nu-1}}{\mu^{\nu-1}}\frac{d\eta}{d\mu} = V, \qquad zU - \mu\frac{dU}{d\mu} + \frac{\eta^{\nu-1}}{\mu^{\nu-1}}\frac{dP}{d\mu} = 0, \qquad P(V-\varepsilon_0)^\gamma \mu^\nu = \text{const}, \tag{23}$$

з граничними умовами

$$U = P = \frac{2(1-\varepsilon_0)}{\gamma+1}, \qquad V = \frac{\gamma - 1 + 2\varepsilon_0}{\gamma+1},$$

а для газу — у вигляді

$$\left(\frac{\eta'}{\mu'}\right)^{\nu-1}\frac{d\eta'}{d\mu'} = V', \qquad z'U' - \mu'\frac{dU'}{d\mu'} + \left(\frac{\eta'}{\mu'}\right)^{\nu-1}\frac{dP'}{d\mu'} = 0, \qquad P'V'^\gamma \mu'^\nu = \text{const} \tag{24}$$

з граничними умовами

$$U' = P' = \frac{2}{\gamma+1}, \qquad V' = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

Перетворення (8), (9), (15)–(17) легко зводяться до безрозмірного вигляду:

$$(1-\varepsilon_0)V' = V - \varepsilon_0, \qquad (1-\varepsilon_0)P' = P, \qquad (1-\varepsilon_0)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\nu-1} U' = U,$$
$$\eta^\nu = (1-\varepsilon_0)\eta'^\nu + \varepsilon_0 \mu^\nu, \qquad \mu = \mu'. \tag{25}$$

З'ясовано, що навіть для автомодельного руху з ударною хвилею (на відміну від стаціонарних рухів) не вдалося знайти тотожне перетворення між системами (22) і (23). Тобто для $\nu \neq 1$ існує різниця між системою, яка виникає з (23) за допомогою перетворення (25), та системою (22). Перетворена система утримує додатковий член $U'\eta'\left(\dfrac{\eta'}{\eta}\right)^{\nu-1}\dfrac{d(\eta/\eta')^{\nu-1}}{d\eta}$.

На прикладі задачі про точковий вибух оцінимо похибку, яку вносить додатковий член. Безрозмірні питомий об'єм V, швидкість U й тиск P обчислювалися двома методами. По-перше, система рівнянь (23) розв'язувалась для деяких конкретних значень ε_0. По-друге, змінні V, U, P знаходились за допомогою перетворення (25) з розв'язку системи рівнянь для газу (24). Результати числових розрахунків для сильної стадії вибуху наведені

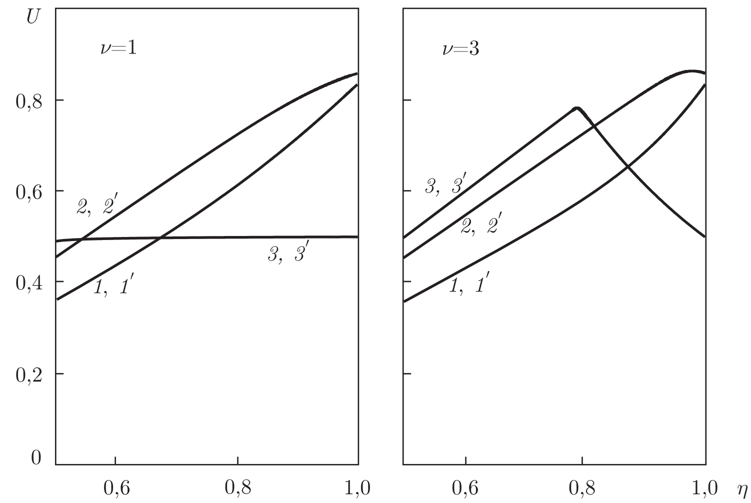

Рис. 1. Профілі безрозмірної швидкості. Точні (криві *1*, *2*, *3*) та наближені (криві *1′*, *2′*, *3′*) розв'язки повністю збігаються

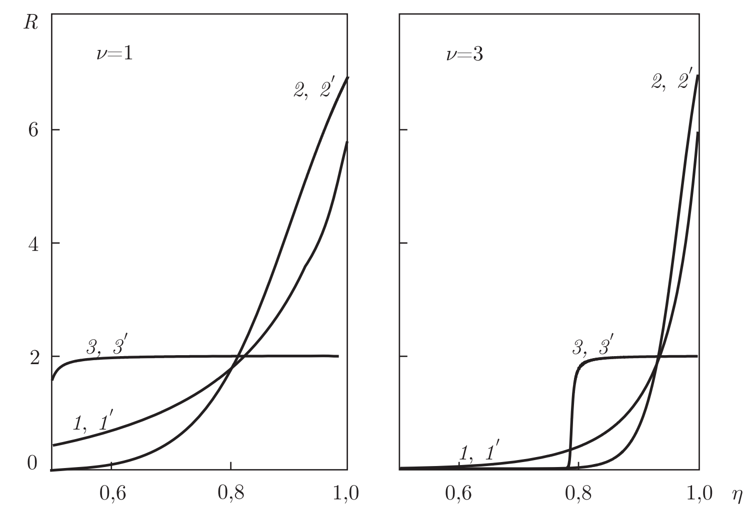

Рис. 2. Профілі безрозмірної густини $R = V^{-1}$. Точні (криві *1*, *2*, *3*) та наближені (криві *1′*, *2′*, *3′*) розв'язки повністю збігаються

на рис. 1–4. Для наглядності скористаємося безрозмірною густиною замість безрозмірного питомого об'єму $R = V^{-1}$. На рис. 1–4 криві *1*, *1′* відносяться до газу ($\varepsilon_0 = 0$, $\gamma = 1{,}4$), криві *2*, *2′* й *3*, *3′* — до двофазного середовища з $\varepsilon_0 = 0{,}1$, $\gamma = 1{,}1$ й $\varepsilon_0 = 0{,}5$, $\gamma = 1{,}005$ відповідно. Майже повний збіг значень спостерігається для U, R, отриманих двома методами. На рисунках різниці, оскільки вони малі, не видно. В той самий час найбільша похибка появляється для P (див. рис. 3). Звертаємо увагу, що тут початкова об'ємна частка $\varepsilon_0 = 0{,}5$, тобто половину початкового об'єму займає конденсована фаза. Видно, що навіть при такому великому об'ємі, який займає нестислива компонента, найбільша розбіжність не перевищує 15%. Отже, розв'язок задачі про сильну стадію вибуху в перетвореній системі координат зводиться до розв'язку системи рівнянь (24) (тут можна скористатися відомими автомодельними розв'язками і табличними даними, поданими, наприклад, в [8, 9, 11]), а потім, застосовуючи перетворення (25), оцінити U, P, V.

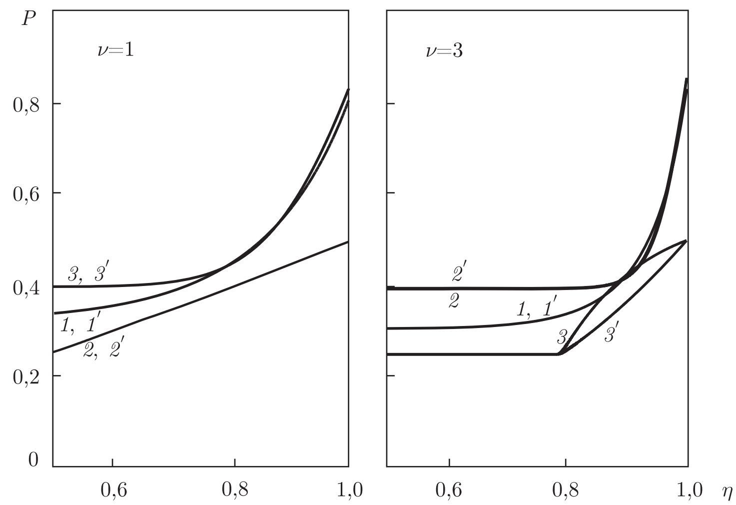

Рис. 3. Профілі безрозмірного тиску. Криві *2* й *3* — точні розв'язки. Криві *2′* й *3′* — наближені розв'язки

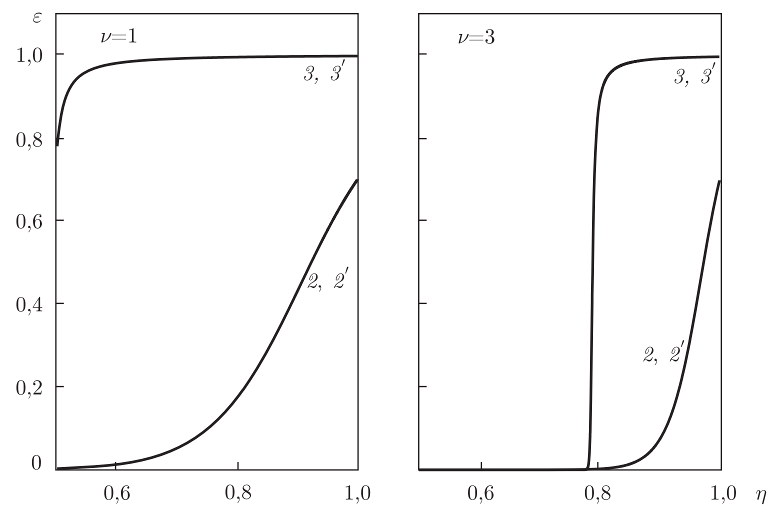

Рис. 4. Профілі об'ємної частки конденсованої компоненти

Таким чином, нами запропоновано перетворення, за допомогою якого можна з певною точністю переносити відомі розв'язки гідродинамічних задач для газу на двофазні середовища з довільною об'ємною часткою конденсованої фази.

1. *Rudinger G.* Some effects of finite particle volume on the dynamics of a gas-particle mixture // AIAA J. – 1965. – **3**, No 7. – P. 3–10.
2. *Арутюнян Г. М.* Условия применимости результатов гидродинамики совершенного газа к дисперсным средам // Изв. АН СССР. Механика жидк. газа. – 1979. – № 1. – P. 157–160.
3. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. I. – Москва: Наука, 1987. – 464 с.
4. *Suzuki T., Ohyagi S., Higashino F. et al.* The propagation of reacting blast waves through inert particle clouds // Acta Astron. – 1976. – **3**. – P. 517–529.
5. *Pai I., Menon S., Fan Z. Q.* Similarity solution of a strong shock wave propagating in a mixture of gas and dusty particles // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – **18**, No 12. – P. 1365–1378.
6. *Кудинов В. М., Паламарчук Б. И., Вахненко В. А.* Затухание сильной ударной волны в двухфазной среде // Докл. АН СССР. – 1983. – **272**, № 5. – С. 1080–1083.

7. *Вахненко В. А., Паламарчук Б. И.* Описание ударно-волновых процессов в двухфазных средах, содержащих несжимаемую фазу // Журн. прикл. мат. и техн. физ. – 1984. – № 1. – С. 105–111.
8. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. – Москва: Наука, 1983. – Ч. I-II.
9. *Коробейников В. П.* Задачи теории точечного взрыва. – Москва: Наука. – 1985. – 400 с.
10. *Kudinov V. M., Palamarchuk B. I., Vakhnenko V. A. et al.* Relaxation phenomena in two-phase media of a foamy structure, in: Shock Waves, Explosion, and Detonations. – New York: AIAA. – 1983. – P. 96–118.
11. *Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л. А.* Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы. – Москва: Наука, 1974. – 255 с.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 22.03.2010

V. O. Vakhnenko

An analogy of the self-similar flows of a gas and a two-phase medium with noncompressive component

We suggest the transformation between the equations for a perfect gas and those for a two-phase medium with any volume occupied by a condensed phase. It is proved that the motion of the two-phase medium in a transformed coordinate system is similar with certain accuracy to that of a perfect gas. This means that the methods developed for a perfect gas can be used to solve shock-wave problems. The scope for the suggested transformation is demonstrated by reference to the strong explosion state in a two-phase medium.